Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till provtentamen i Matematik 2, 5B1116, för B, E, I, IT, M, Media och T ht 2001.

1. Ytan är en triangel med hörn i $A(6,0,0), B(0,12,0)$ och $C(0,0,4)$.
Den sökta arean är alltså $\frac{1}{2}|\vec{AB}x\vec{AC}| = \frac{1}{2}|(-6,12,0)x(-6,0,4)| = \frac{1}{2}|(48,24,72)| = \frac{24}{2}\sqrt{2^2+1^2+3^2} = \underline{12\sqrt{14}}$.

2. Första ytans normalvektor i punkten (x,y,x) :
$\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{1} = \mathrm{grad}F(3x+1/y+z) = (F'\cdot 3, F'\cdot(-1/y^2), F'\cdot 1)$.
Andra ytans normalvektor i punkten (x,y,x) :
$\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{2} = \mathrm{grad}F(x+y^3) = (F'\cdot 1, F'\cdot(3y^2), 0)$.
Alltså, $\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{1}\cdot\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{2} = (F')^2(3-3+0) = 0$ för alla punkter (x,y,z) på skärningskurvan, dvs $\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{1}$ och $\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{2}$ är vinkelräta där.
(Notera att p.g.a förutsättningen $F' \neq 0$ är gradienterna ovan $\neq (0,0,0)$.)

3. Om $U(t) = T(x(t),y(t),z(t))$ gäller allmänt att
$U'(t) = \mathrm{grad}T(x,y,z)\cdot(x'(t),y'(t),z'(t))$ och
$U'(0) = \mathrm{grad}T(\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{o})\cdot\bar{\mathbf{r}}'_\mathbf{o}$, där $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{o} = (x(0),y(0),z(0))$ och $\bar{\mathbf{r}}'_\mathbf{o} = (x'(0),y'(0),z'(0))$.
$\mathrm{grad}T = \mathrm{grad}(\frac{1}{20}(2+x^2+xy+3z^2)) = \frac{1}{20}(2x+y,x,6z)$.
För humlan A gäller $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{o} = (1,2,1)$ och $\bar{\mathbf{r}}'_\mathbf{o} = (1,2,2)$, varför
$U'_A(0) = \frac{1}{20}(4,1,6)\cdot(1,2,2) = \frac{1}{20}(4+2+12) = \frac{18}{20}$.
För humlan B gäller $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{o} = (3,0,1)$ och $\bar{\mathbf{r}}'_\mathbf{o} = (2,-1,1)$, varför
$U'_B(0) = \frac{1}{20}(6,3,6)\cdot(2,-1,1) = \frac{1}{20}(12-3+6) = \frac{15}{20}$.
<u>Humlan A</u> känner alltså en aning större temperaturökning.

4. Gauss-Jordan ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & b-4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & -b-1 \end{array}\right]$$

vilket ger oändligt många lösningar då $b = -1$.
Lösningarna blir (sätt $z = t$): $y = t - 5, x = 2y - t + 4 = t - 6$.
Svar: $\underline{b = -1, \quad x = t - 6, y = t - 5, z = t.}$

5.

$u_x = y, \quad u_y = x - 1, \quad v_x = 2x - 2, \quad v_y = -2y$
ger allmänna Jacobimatrisen $J =$

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ 2x-2 & -2y \end{pmatrix}.$$

$$Det(J) = \begin{vmatrix} y & x-1 \\ 2x-2 & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - 2(x-1)^2 = 0,$$

vilket är $= 0$ endast då $x = 1, y = 0$,
dvs. transformationen är inverterbar överallt utom i $\underline{(x, y) = (1, 0).}$

Jacobimatrisen i $(x, y) = (-1, 1)$:

$$J(-1, 1) = J_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Den sökta Jacobimatrisen för inversen i $(x, y) = (-1, 1)$ är

$$J_1^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}}.$$

6.

$u(x, y) = (\cos x - y^2)(1 + xy) = \cos x + xy\cos x - y^2 - xy^3$.
$u_x = -\sin x - xy\sin x + y\cos x - y^3, \qquad u_y = x\cos x - 2y - 3xy^2$.
$u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$.

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\cos x - y\sin x - xy\cos x - y\sin x, && u_{xx}(0,0) = -1 \\ u_{xy} &= -3y^2 - x\sin x + \cos x, && u_{xy}(0,0) = 1 \\ u_{yy} &= -2 - 6xy, && u_{yy}(0,0) = -2 \end{aligned}$$

MacLaurinutvecklingen: $\quad u(x,y) = \bar{\mathbf{x}}^T A \bar{\mathbf{x}} + R_2,$

$$\text{där } \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(forts.)}$$

Hessianens egenvärden:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(2+\lambda) - 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

$\lambda = -3/2 \pm \sqrt{9/4 - 1} = -3/2 \pm \sqrt{5}/2 < 0.$
Båda egenvärdena är< 0.
Punkten $(0,0)$ är alltså ett <u>lokalt maximum.</u>

7.

$\bar{\mathbf{f}}_\mathbf{1} = 2\bar{\mathbf{e}}_\mathbf{1} - \bar{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \quad \bar{\mathbf{f}}_\mathbf{2} = \bar{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + \bar{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$

$$\text{Transformationsmatrisen är alltså:} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Låt (x,y) vara koordinaterna i $\bar{\mathbf{e}}$-systemet och (u,v) i $\bar{\mathbf{f}}$-systemet.
Då gäller

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u+v \\ -u+v \end{pmatrix}$$

Insättning av $(x,y) = (2u+v, -u+v)$ i ekvationen $y = 2x^2 + 1$ ger:
$-u + v = 2(2u+v)^2 + 1$ eller $\underline{8u^2 + 8uv + 2v^2 + u - v + 1 = 0}$.

8.

Ekvationen $AXB^{-1} = C$ löses av $X = A^{-1}CB$, om A är inverterbar.
Man får:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ -8 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}CB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ -8 & 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -5 & -13 & 1 \\ 26 & 59 & -3 \end{pmatrix}}$$

9.

$W = \text{Max}|S\bar{\mathbf{v}}|^2$ då $|\bar{\mathbf{v}}| = 2$ skall bestämmas.
$W = 4M^2$, där $M = \text{Max}|S\bar{\mathbf{v}}|$ då $|\bar{\mathbf{v}}| = 1$, dvs $M = S$:s matrisnorm.
$M = \sqrt{\lambda_o}$, där λ_o är största egenvärdet till matrisen $S^T S$.

$$S^T S = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 6 \end{pmatrix}$$

Egenvärden: $(7-\lambda)(6-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$
$\lambda = 13/2 \pm \sqrt{\frac{169-144}{4}} = 13/2 \pm 5/2$, dvs. $\lambda_o = 9$.
Alltså $M = 3$, $W = 4 \cdot 3^2 = \underline{36}$.
(Problemet kan också lösas som ett minimeringsproblem med bivillkor m.hj.a. Lagranges multiplikatormetod.)

10.

Sätt $\bar{\mathbf{a}} = (1, 0, -1, 2), \bar{\mathbf{b}} = (1, -1, 0, 1), \bar{\mathbf{c}} = (3, 2, 5, 0)$.
Problemet är ekvivalent med att i minstakvadratmetodens mening lösa det överbestämda linjära ekvationssystemet

$$s\bar{\mathbf{a}} + t\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{c}} \quad \text{eller} \quad H\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{c}}^T, \quad \text{där} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man får normalekvationerna:

$$H^T H \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = H^T \bar{\mathbf{c}}^T, \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{som har lösningen}$$

$s = -1$, $t = 4/3$, vilket ger den sökta punkten $(-1)\bar{\mathbf{a}} + (4/3)\bar{\mathbf{b}} = \underline{(1/3, -4/3, 1, -2/3)}$.

(Problemet kan också lösas genom minimering av funktionen
$U(s,t) = |s\bar{\mathbf{a}} + t\bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{c}}|^2$.)