LDL^T-faktorisering, sammanfattning

En symmetrisk matris $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kan faktoriseras som $\mathbf{H} = \mathbf{LDL}^T$ där

$\mathbf{L}$ är en vänstertriangulär matris,
$\mathbf{D}$ är en diagonalmatris.

Tecknen på diagonalelementen i $\mathbf{D}$ motsvarar tecknen på $\mathbf{H}$-matrisens egenvärden.

Faktoriseringen görs genom att

- multiplicera $\mathbf{H}$ från vänster med vänstertriangulära matriser $\mathbf{E}_1$,...,$\mathbf{E}_{n-1}$ motsvarande radoperationer
- multiplicera $\mathbf{H}$ från höger med högertriangulära matriser $\mathbf{E}_1^T$,...,$\mathbf{E}_{n-1}^T$ motsvarande kolumnoperationer

så att resultatet blir diagonalmatrisen $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{E}_{n-1}\mathbf{E}_{n-2}\ldots\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^T\ldots\mathbf{E}_{n-2}^T\mathbf{E}_{n-1}^T = \mathbf{D}$$

Ur detta följer:

$$\mathbf{H} = \underbrace{\mathbf{E}_1^{-1}\ldots\mathbf{E}_{n-1}^{-1}}_{\mathbf{L}}\,\mathbf{D}\,\underbrace{(\mathbf{E}_{n-1}^T)^{-1}\ldots(\mathbf{E}_1^T)^{-1}}_{\mathbf{L}^T}$$

Radoperationer som matrismultiplikation
Antag att vi i matrisen $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vill lägga till α·*rad i* till *rad j*:

- Låt $\mathbf{E}$ vara identitetsmatrisen och sätt $\mathbf{E}(j,i) = \alpha$. Multiplicera $\mathbf{H}$ från vänster med $\mathbf{E}$.

Inversen till $\mathbf{E}$ motsvarar radoperationen där vi drar bort α·*rad i* från *rad j*:

- Låt $\mathbf{E}^{-1}$ vara identitetsmatrisen och sätt $\mathbf{E}(j,i) = -\alpha$. Multiplicera från vänster med $\mathbf{E}^{-1}$.

Motsvarande för kolumnoperationer.