1

23/3

F1

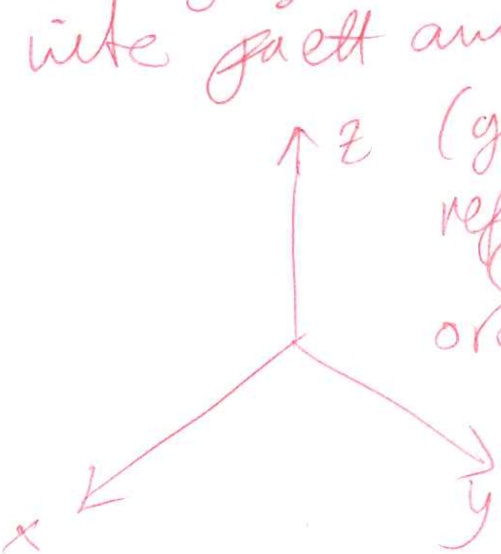
08–10, D1

10.1 Analytisk geometri i tre dimensioner

10.6 Cylindriska & sfäriska koordinater.

Rek uppg. 10.1: 11, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39
10.6: 3, 5, 9, 13.

10.1 3D värld. Hur representerar vi punkter? Dvs en metod att säga att vi är på ett ställe och inte på ett annat! Vi väljer (godtyckligt) en referenspunkt (origo) och tre ortogonala riktningar som utgår från origo.



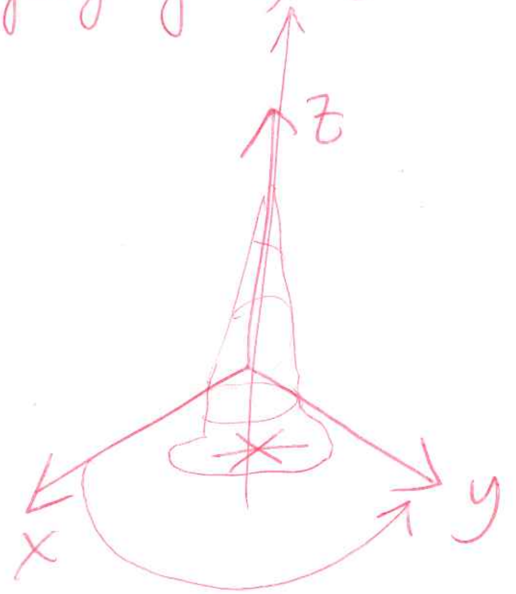
Vi tänker på dessa som

$$\begin{cases} \text{höjd} & (z) \\ \text{bredd} & (y) \\ \text{längd} & (x) \end{cases}$$

Ordningen är ibland viktig: $\boxed{x\ y\ z}$,

och även hur vi ritar ut axlarna.

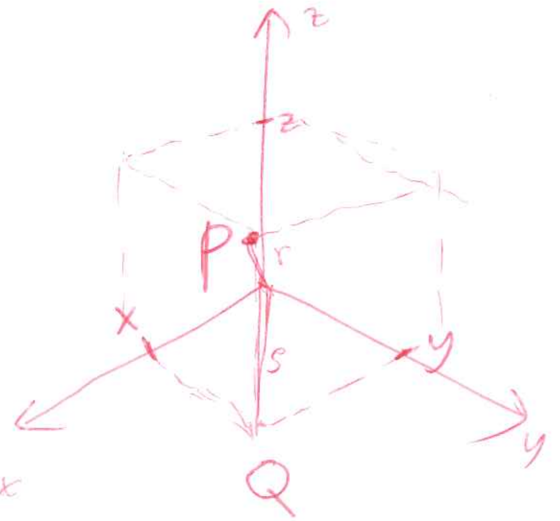
Skruvregeln För en vanlig (högergängad) skruv gäller att



skruva runt i planet xy, från x mot y; då ligger skruven pekande i z-riktningen!

$\boxed{\text{Högersystem}}$

(x, y, z) koordinaterna för en punkt P i 3D-rummet.



Pythagoras sats: $|\overrightarrow{OQ}|^2 = s^2 = x^2 + y^2$.

Pythagoras sats igen: $\underbrace{|\overrightarrow{OP}|^2}_{r^2} = |\overrightarrow{OQ}|^2 + z^2 =$

$$= s^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Så att $r = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Avståndet mellan två andra punkter $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

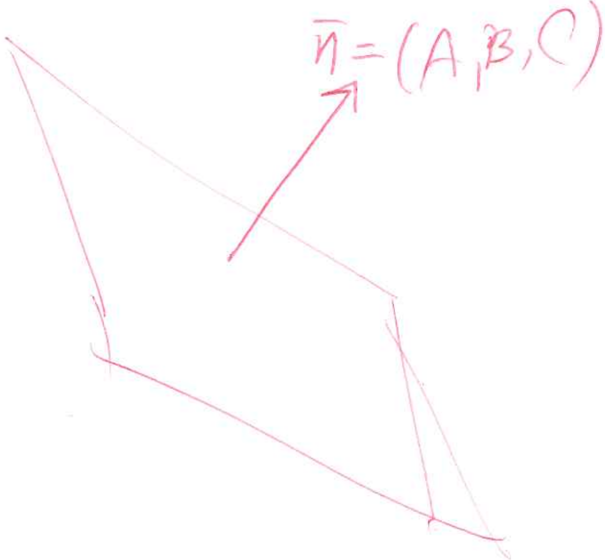
$$r = |\overrightarrow{P_1P_2}| = |(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)| =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Några ekvationer & motsvarande ytor.

Ex. (a) $Ax+By+Cz=D$ där inte alla A,B,C är noll. Ett plan.

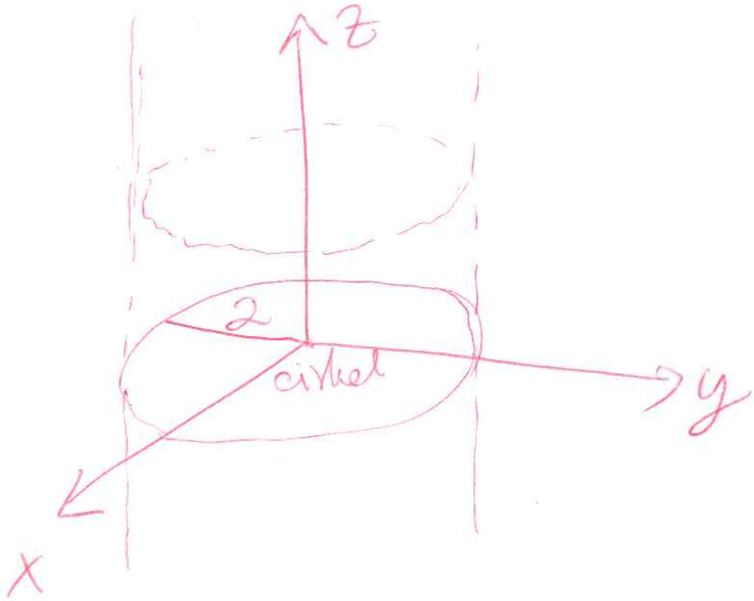
Normalvektor (A,B,C).



(b) $x^2+y^2=4$ är i (x,y)-planet en cirkel med radie 2 runt origo.

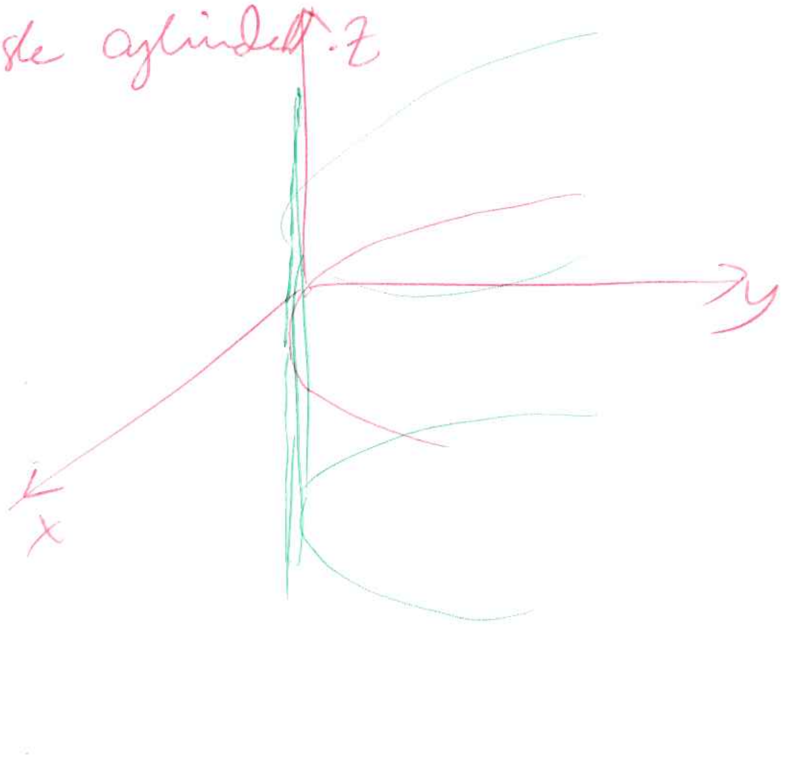
Vad blir det i (x,y,z)-rummet?

Jo, z-koordinaten är fri (kan bli vad som helst) och cirkeln när vi flyttar den i z-riktningen utfyller en cylinder.



c) $y = x^2$ är en parabel i (x, y)-planet.

I (x, y, z) rummet blir det en paraboliske cylinder



6

(d) $$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=25$$

betecknar sfärytan på radie 5 med centrum i punkten $(2,-3,5)$.

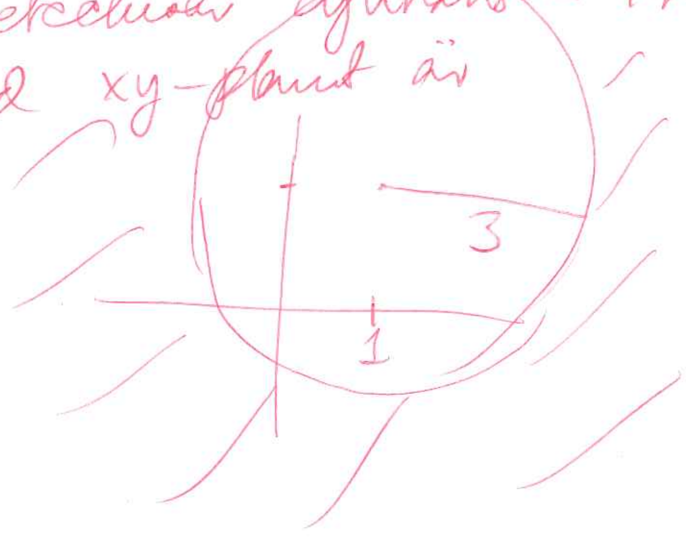
Vad händer om vi har en olikhet istället för likhet?

Typiskt får vi alla punkter på ena sidan om motsvarande yta.

T.ex. $z>0$ betecknar alla punkter ovanför xy-planet.

Ex. $$(x-1)^2+(y-2)^2>9$$

betecknar cylindriska kroppen vars genomskärning med xy-planet är



7

Det är nog mest en vanesak att lära sig visualisera i 3D. Men det är definitivt svårare att rita än 2D!

Omgivningar i planet och i 3D.

En omgivning av en punkt P (i ndim) ($n=2$ el. 3 t.ex) är en mängd på formen

$$\boxed{B_r(P) = \{Q : \text{avståndet mellan } Q \text{ och } P < r\}}$$
$(r>0)$

I två dim. en cirkelskiva, i 3D en boll.

Def En mängd S är $\boxed{\text{öppen}}$ i $\mathbb{R}^n$ om varje punkt i S har en omgivning som är en delmängd av S.

$S^c = \{\text{alla punkter utanför } S \text{ i } \mathbb{R}^n\}$

Def. S sluten $\Leftrightarrow$ S^c öppen.

En mängd S kan vara både öppen och sluten. Men i så fall är antingen

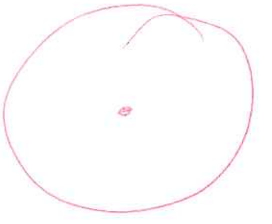
$$\begin{cases} S = \emptyset = \text{tomma mängden, eller} \\ S = \mathbb{R}^n = \text{hela rummet.} \end{cases}$$

<u>DEF.</u> (1) $P \in \mathbb{R}^n$ är <u>inre</u> om $P \in S$ och det finns en omgivning av P som ligger i S.

(2) P är en <u>yttre</u> punkt till S om $P \in S^c$ och P är en inre punkt för S^c.

(3) Om $P \in \mathbb{R}^n$ <u>ej</u> är inre eller yttre säger vi att P är en randpunkt.

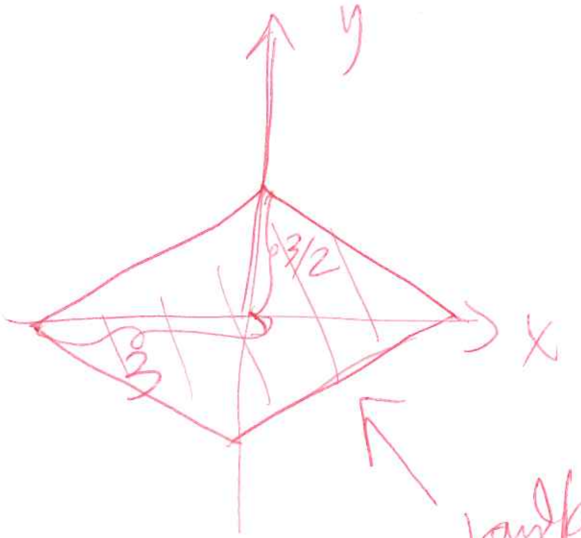
<u>Ex.</u> (2D-exempel) (a) $0 < x^2 + y^2 < 9$ öppen mängd



randen är

$$\underbrace{\{(0,0)\}}_{\text{origo}} \cup \{(x,y) : x^2 + y^2 = 9\}.$$

(b) $|x| + 2|y| \leq 3$ sluten mängd



randfiguren $|x|+2|y|=3$

Uppgifter

11) Avståndet från $(1,1,1)$ till närmaste punkten på x-axeln?

x_0 närmaste punkten, dvs $(x_0,0,0)$.

avst. $= |(1,1,1)-(x_0,0,0)| =$

$$= \sqrt{(x_0-1)^2+1^2+1^2} \geq \sqrt{2}$$

minsta avst. $= \sqrt{2}$ ($x_0 = 1$ då!)

Cylindriska & Sfäriska Koordinater

(x, y, z) beskriver en punkt med hjälp av Cartesiska koordinater: höjd-bredd-längd-angivelse.

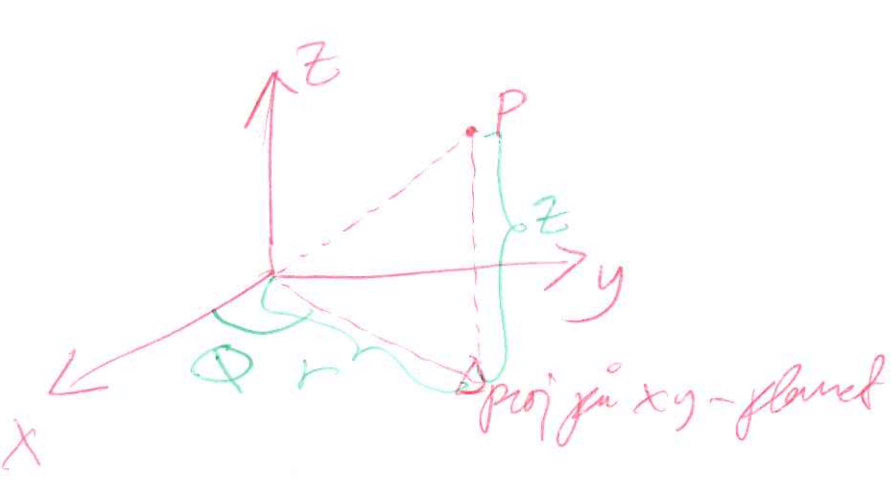
Men man kan tänka sig andra sätt att ange var vi befinner oss i rummet (eller planet). Jfr t.ex polära koordinater!

Där anger vi ju avståndet till origo och en vinkel (till x-axeln).

CYLINDRISKA KOORDINATER:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

dvs ett sätt att lyfta polära koordinater till 3D.



Observera att

$r^2 = x^2 + y^2$ så att

$$\text{avst}(\overrightarrow{OP}) = \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{=r^2}+z^2} = \sqrt{r^2+z^2}$$

Ex. Beskriv ytan som ges av:

(a) $z = r$ (kon)

(b) $z = r\cos\theta$ (plan)

(c) $\theta = \frac{\pi}{2}$. (~~halft~~ halvplan)

SFÄRISKA KOORDINATER.

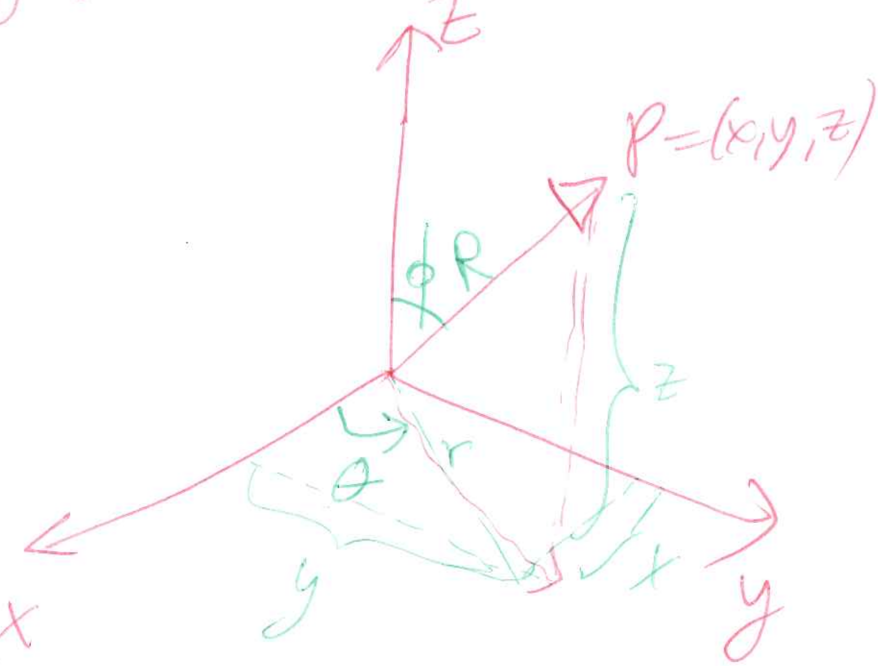
(kallas även rymdpolära koordinater).

Om vi tänker oss att jordytan är en sfär (nästan sant, fast snarare en rotationsellipsoid) så inser vi att för att beskriva en position behövs två vinklar: longitud och latitud.

12

Latituden är vinkeln mot ekvatorn, medan longituden är en vinkel mot storcirkeln genom nordpolen och Greenwich {sydpolen

Här modifierar vi latituden till vinkeln mot Nordpolen (z-axeln) istället! Istf Greenwich tar vi x-axeln efter projektion mot xy-planet.



13

Trippeln (R, ϕ, θ) beskriver alltså också punkten $P = (x, y, z)$

Vi skriver $P = [R, \phi, \theta]$

Vad är nu sambandet mellan $[R, \phi, \theta]$ och (x, y, z)?

$z = R\cos\phi$ uppenbarligen.

$r =$ hjälplängd $= R\sin\phi$

$x = r\cos\theta = R\sin\phi\cos\theta$

$y = r\sin\theta = R\sin\phi\sin\theta$

så att

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

sökta sambandet

$$\begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta < 2\pi \text{ (t.ex.)} \\ R \geq 0 \end{cases}$$

$R^2 = x^2+y^2+z^2 = r^2+z^2$ gäller

Ex (1) R = konstant är en sfär centrerad i origo

(2) ϕ = konstant är en cirkulär kon runt z-axeln

(3) θ = konstant är vertikala halvplan (kant längs z-axeln)

ϕ = kolatitud

θ = longitud

R = radien

Ex. (a) Om $P = [\underset{R}{2}, \underset{\phi}{\tfrac{\pi}{3}}, \underset{\theta}{\tfrac{\pi}{2}}]$ sfäriska koordinater

så P = kartesiska koord. ?

$P=(x,y,z)$; $\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ y = R\sin\phi\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{3} \\ z = R\cos\phi = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \end{cases}$

Svar $\boxed{P=(0,\sqrt{3},1)}$

(b) $P = (1,1,\sqrt{2})$ kartesiskt.

$R^2 = x^2+y^2+z^2 = 1^2+1^2+\sqrt{2}^2 = 4 \Rightarrow R=2$

$$1 = x = 2\sin\phi\cos\theta$$

$$1 = y = 2\sin\phi\sin\theta$$

$$\sqrt{2} = z = 2\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ 1 = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ så } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$P = [R, \phi, \theta] = \left[2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Obs! Vi skriver $[R, \phi, \theta]$ [och inte t.ex. $[R, \theta, \phi]$] därför att att vi får ett s.k. högersystem (orienteringen byts inte!)