F10

21/4 kl 10-12 i D1

14.1. Dubbelintegraler.

14.2. Upprepad integration i kartesiska koordinater.

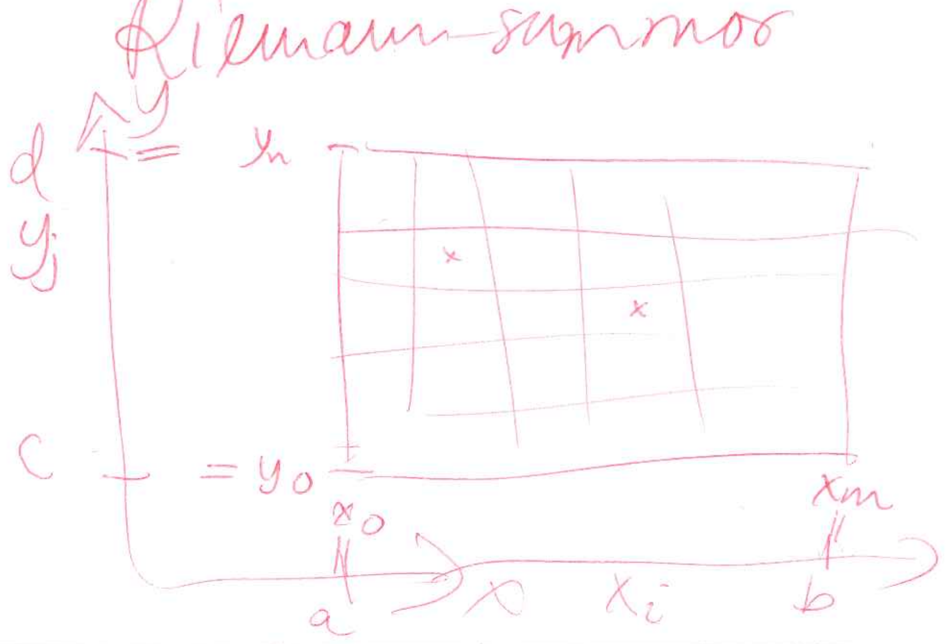
Rek. upg. 14.1: 15, 19, 21.

14.2: 3, 5, 15, 23.

14.1 Dubbelintegraler

Rita grafer.

Riemann-summor



DEF (DUBBELINTEGRAL PÅ REKTANGEL)

Välj (x_j^*, y_k^*) godtyckligt i småreктanglarna.

Om Riemannsumman → ett tal I

då diam av största delrektangeln → 0

så är integralen $\iint = I$.

<u>DEF.</u> (DUBBELINTEGRAL PÅ MER ALLMÄNT BEGR. OMRÅDE)

$$\int_{\text{Rekt.}} 1_D \cdot f \, dA = \int_D f \, dA \quad \text{DEF.}$$

③

SATS (kont. fn på snällt område är integrerbar).

EGENSKAPER :

(a) $\iint_D f\,dA = 0$ om D har area $= 0$.

(b) $\iint_D 1\,dA =$ area (D).

(c) Uppskattning om $f \geq 0$. (eller om $f \leq 0$)

(e) linearitet

(f) $f \leq g \Rightarrow \iint f \leq \iint g$.

(g) triangelolikh.

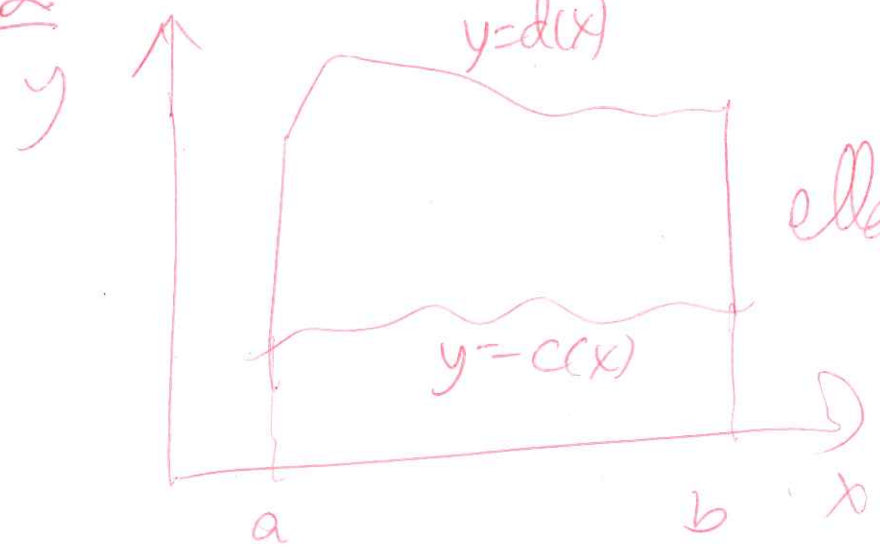
(h) $D = \bigcup_j D_j$, D_j disjunkta

$$\iint_D = \sum_j \iint_{D_j}$$

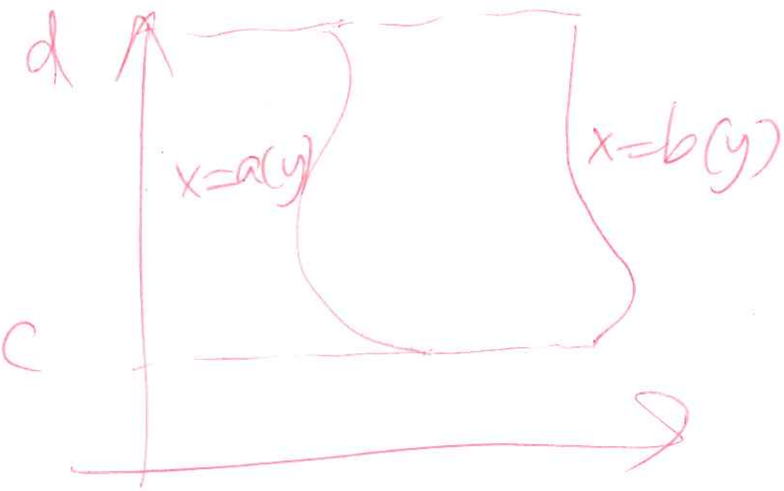
D skiva radie 1

Ex. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, \underbrace{dxdy}_{dA} = \frac{2\pi}{3}$.

142



eller



Hur räknar vi ut dubbelintegralen egentligen?

<u>SATS</u>: (Iterationsmetoden)

Om D ges som $\left\{(x,y): a \le x \le b \text{ och } c(x) \le y \le d(x)\right\}$ så är

$$\iint_D f(x,y)\,\underbrace{dx\,dy}_{dA} = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Motsvarande om vi byter roller för x och y:

Om D ges som $\left\{(x,y): c \le y \le d \text{ och } a(y) \le x \le b(y)\right\}$ så blir

$$\iint_D f(x,y)\,\overset{dA \text{ i LB}}{dx\,dy} = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ex (s. 815 LB)

Finn volymen på kroppen som ligger ovanför kvadraten $Q: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$

och under planet $z = 4 - x - y$.

Vi kollar först att planet ligger ovanför kvadraten ...

Ex. (s. 816 LB)

Bestäm integralen $\iint_T xy\,dA$ där T är triangeln med hörn i $(0,0), (1,0), (1,1)$.