F11 Tor 23/4 08–10 i E1

14.3. Generaliserade integraler och medelvärdessatsen.

14.4. Dubbelintegraler i polära koordinater

Rek. uppg. 14.3: 1, 3, 13, 27
14.4: 5, 9, 15, 19, 21.

14.3. Generaliserade integraler och medelvärdessatsen.

Generaliserade integraler behövs när:

(1) integrationsområdet D är obegränsat,

eller

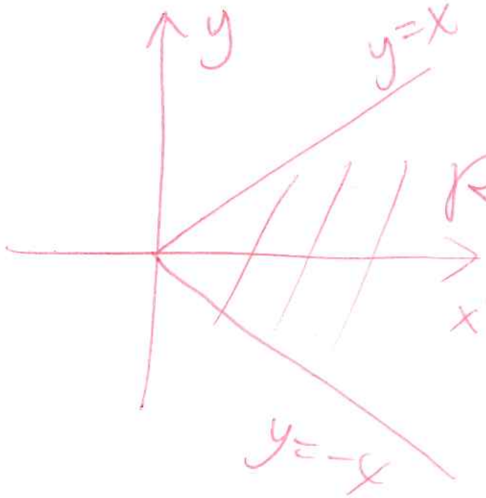
(2) f är obegränsad.

$$\boxed{\iint_D f\,dA = ?}$$

Observera att om $f \geq 0$ så ska

$\int_D f\,dA$ antingen finnas som ett reellt tal eller vara $= +\infty$ (oändligheten)

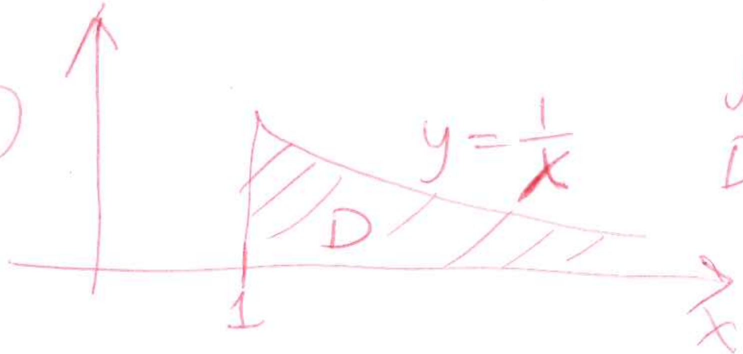
Ex. (s. 820)



$$\iint_R e^{-x^2}\,dA = ?$$

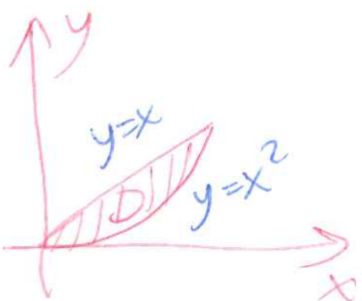
int. m a p y först!

Ex. (s. 821)



$$\iint_D \frac{dA}{x+y} = ?$$

Ex. (s. 821)



$$\iint_D \frac{dA}{xy} = ?$$

konvergent eller divergent?

③

SATS (av medelvärdestyp)

Om D är sluten, begränsad, sammanhängande i xy-planet, så finns en punkt $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0) \cdot \text{area}(D).$$

DEF. Funktionens f:s medelvärde över D är

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dA$$

Spec: medelvärdet av x över D är

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D x\,dA.$$

($(\bar{x}, \bar{y})$ ger tyngdpunkten!)

Ex. (s.823) Vad är medelvärdet av x^2+y^2 över triangeln T med hörn i (0,0), (1,0), (1,1)?

14.4. Dubbelintegraler i polära koordinater

Ex. Finn volymen av kroppen ~~under~~ ovanför xy-planet och under paraboloiden $z=1-x^2-y^2$!

$$V=\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)\,dA=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\,dy\right)dx$$

Lite mödosamt!

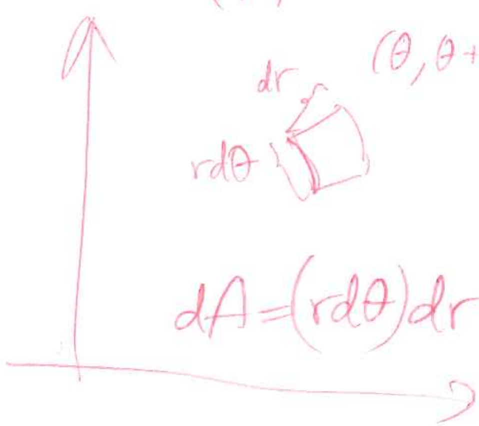
Men i polära koordinater blir det

$$V=\iint_{\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}}(1-r^2)\,dA$$

och vi behöver bara veta hur vi

..lua folten dA.

$$\boxed{dA = r\,dr\,d\theta}$$



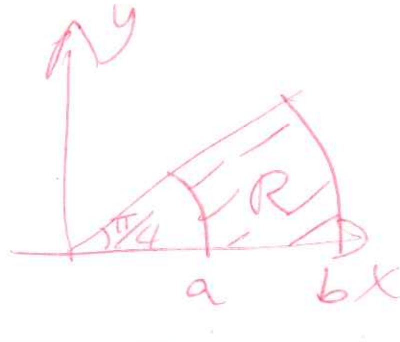
$dA = (r\,d\theta)\,dr =$

$= r\,dr\,d\theta$

Sedan är det lätt:

Ex (s. 827)

$$I = \iint_R \frac{y^2}{x^2}\,dA = ?$$



En viktig integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

⑥

Mer allmänna koordinatbyten.

Polära koordinater är ett speciellt koordinatbyte. Mer allmänt kan vi jobba med

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

och gå mellan (x,y) och (u,v) i beskrivningen av en ~~punkt~~.

Vad händer då med area-elementet?

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} g(u,v) \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\text{Jacobianen}} du\,dv$$

där $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

samt

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Ex (s.832) Bestäm m.h.a. lämpligt koordinatbyte arean av elliptiska skivan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1.$$

$\left(\begin{array}{l} x=au \\ y=bv \end{array}\right)$ etc.

Ex. (s.832) Bestäm integralen $\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy$,

där D är