F12 Fre 24/4 08–10 i E1.

14.5. Trippelintegraler

14.6. Variabelbyte i trippelintegraler.

14.7. Tillämpningar av trippelintegraler.

Rek uppg: 14.5: 5, 7, 9.
14.6: 3, 7, 11.
14.7: 5, 9, 13, 21, 27.

14.5. Trippelintegraler

Om $f(x,y,z)$ är en funktion av tre variabler, så är

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

trippelintegralen av f över området B i $\mathbb{R}^3$.

På samma sätt som en dubbelintegral är volymen med tecken av kroppen mellan grafen (2D) och xy-planet, är

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV$$

en 4 dim-volym med tecken av 4D-kroppen mellan 3D-grafen och xyz-rummet. Speciellt gäller att

$$\mathrm{Vol}(D)=\iiint_D dV.$$

Om t.ex. ρ är densiteten hos ett material (som är inhomogent) blir

$$\iiint_D \rho\,dV = \text{massan}.$$

Ex. $$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2}(2+x-\sin z)\,dV \underset{\text{symmetri}}{=} \iiint 2\,dV = 2\cdot\frac{4\pi}{3}a^3=\frac{8\pi}{3}a^3.$$

Hur räknar vi ut trippelintegraler? 3

I princip på samma vis som för dubbelintegraler!

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2(x)}^{b_2(x)}\left(\int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

om D beskrivs av

$$\begin{cases} a_3(x,y) \le z \le b_3(x,y) \\ a_2(x) \le y \le b_2(x) \\ a_1 \le x \le b_1 \end{cases}$$

Speciellt om D är en rätvinklig axelparallell rektangel (med b_2, b_3, a_2, a_3 konstanta)

$$\iiint_D f\,dV = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

men vi kan också köra någon annan ordning i så fall. Om dessutom f är av produkttyp

$f(x,y,z) = F(x)G(y)H(z)$ så =

$$\iiint F(x)G(y)H(z)\,dx\,dy\,dz =$$

$a_1 \le x \le b_1$
$a_2 \le y \le b_2$
$a_3 \le z \le b_3$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} F(x)\,dx\right)\left(\int_{a_2}^{b_2} G(y)\,dy\right)\left(\int_{a_3}^{b_3} H(z)\,dz\right).$$

Ex. Om T är tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, och $(0,0,1)$, beräkna

$$I = \iiint_T y\,dV.$$

T ~~be~~ bestäms av
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \\ x+y+z \le 1 \end{cases}$$

Ex. Uttryck $I=\int_0^1\left(\int_y^1\left(\int_0^z f(x,y,z)\,dx\right)dz\right)dy$

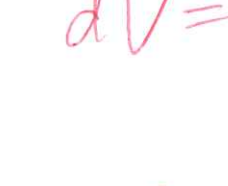
som en trippelintegral, och skissera över vilken kropp som integralen tas.

14.6 Variabelbyte i trippelintegralen

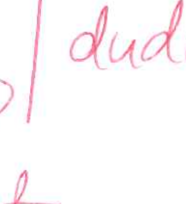
$$dV=dx\,dy\,dz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$$

om vi gör variabelbytet

$$\begin{cases} x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$$



$S \longrightarrow D$



uvw-rummet xyz-rummet

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\overset{dxdydz}{\cancel{dV}}=\iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$$

Ex. $\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$ där $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases}$

$E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$ ellipsoiden

blir bollen $u^2+v^2+w^2 \le 1$. Jacobianen

är $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$, så

$$\mathrm{vol}(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz = \iiint_{\substack{\text{Bollen} \\ B}} abc\,du\,dv\,dw =$$

$$= abc \cdot \frac{4\pi}{3}.$$

Cylindriska koordinater:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\boxed{dV = \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dx\,dy}\,dz}$

precis som polära koord.

övning

Ex. Använd en trippelintegral för att bestämma volymen på kroppen innanför sfären $x^2+y^2+z^2=6$ och ovanför paraboloiden $z=x^2+y^2$.

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

$$\boxed{dV = R^2\sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta}$$

$$\begin{cases} 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le R < \infty \end{cases}$$

naturliga villkor på parametrarna!

Ex. Antag att en planet har densitet

$\rho = \cancel{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}\ \frac{\rho_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $x^2+y^2+z^2 \le a^2$, där $a>0$ är planetens ~~massa~~ radie. Bestäm massan.

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a} \cancel{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}\ \frac{\rho_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \rho_0 \iiint \frac{1}{R} \cdot R^2 \sin\phi \, dR \, d\phi \, d\theta =$$

$0 \le R \le a$

$0 \le \phi \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$= \rho_0 \int_0^a R \, dR \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} =$$

$$= 4\pi\rho_0 \left[\frac{R^2}{2} \right]_0^a = 2\pi a^2 \rho_0 \text{ massenheter.}$$

14.7. Tillämpningar av multipelintegraler

i) Area på en graf $\begin{cases} z = f(x,y) \\ (x,y) \in D \end{cases}$ ges av

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx\,dy$$

Ex. Bestäm arean av hyperboliska paraboloiden ~~xy~~ $z=x^2-y^2$ innanför cylindern $x^2+y^2=a^2$.

Här är D: $x^2+y^2 \le a^2$ (cirkelskiva)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

graf-ytan $= \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy =$ [polära koord]

$$= \iint_{\substack{0\le r\le a \\ 0\le\theta\le 2\pi}} \sqrt{1+4r^2}\; r\,dr\,d\theta =$$

$\frac{3}{2}\,4\,2r$

$$= 2\pi \int_0^a \sqrt{1+4r^2}\; r\,dr = 2\pi \left[\frac{1}{12}\left(1+4r^2\right)^{3/2}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\left(1+4a^2\right)^{3/2} - 1\right).$$

Masscentrum

ρ = densiteten

$$\bar{x} = \frac{\iiint_R x\rho\,dV}{\iiint_R \rho\,dV}, \quad \bar{y} = \ldots, \quad \bar{z} = \ldots$$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ är masscentrum för R.

Kombination $\bar{r} = (x, y, z)$:

$$\boxed{\bar{r} = \frac{\iiint_R \rho\bar{r}\,dV}{\iiint_R \rho\,dV}}$$

Ex. Bestäm masscentrum för

$$S: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0, \quad z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \end{cases}$$

symmetri ger $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ etc.

SVAR $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$