F13 Mån 27/4 10-12 i $\boxed{D1}$

15.1. Vektorfält och skalärfält.

15.2. Konservativa fält.

Rek. uppg. 15.1: 3, 5, 17.
15.2: 3, 5, 7, 21.

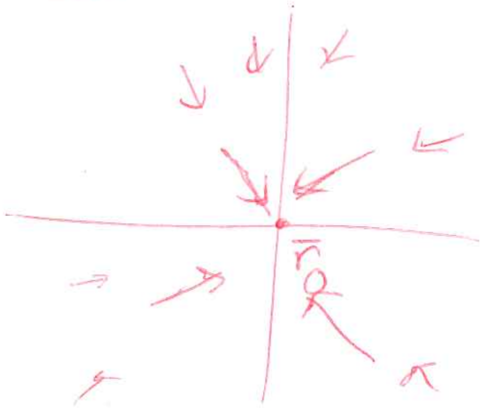
Def. Ett skalärfält Φ på D (i $\mathbb{R}^n$) (n = dimensionen)
är en funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$.
Ett vektorfält $\bar{F}$ på D är en funktion $\bar{F} : D \to \mathbb{R}^n$.

Vi specialiserar på $\mathbb{R}^3$ ($n=3$).
Ett skalärfält ger alltså ett värde i varje punkt (i ett område) i $\mathbb{R}^3$. Ex. vis temperaturen (som varierar) i ett rum. Nära fönstren är det ofta kallare, och värmen samlas nära taket! Även gravitationspotentialen!

vektorfält ger istället en vektor i varje punkt. Vi kan tänka oss att rita den vektorn i ett antal punkter och på så vis bilda oss en uppfattning om fältet.

Exempel: Vattenströmmar
Elektriskt fält
Magnetiska fält.

Gravitationsfält $\bar{F} = -\frac{km}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^3}(\bar{r}-\bar{r}_0)$



Fältlinjer (flödeslinjer) (i 3D)

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \underbrace{\lambda(t)}_{\text{prop. konstant}} \bar{F}(\bar{r}(t))$$

(flödeslinjer)

$$\boxed{\bar{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\bar{k}}$$

$$\boxed{\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}}$$

...ion fältlinjerna till $\bar{F} = (xz, 2x^2z, x^2) =$ 3

$= xz\bar{i} + 2x^2z\bar{j} + x^2\bar{k}$.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = (x', y', z') = \lambda(t)\bar{F} = \lambda(t)(xz, 2x^2z, x^2)$$

$$\begin{cases} x' = \lambda(t)xz \\ y' = \lambda(t)2x^2z \\ z' = \lambda(t)x^2 \end{cases} \quad \text{ger:} \quad \begin{cases} 2x\,dx = dy \\ 2z\,dz = dy \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 + C_1 \\ y = z^2 + C_2 \end{cases}$$

~~$2x\,dx\,t\,dz$~~

paraboliska cylindrar & snitt av dessa.

Vektorfält i polära koordinater (2D)

~~Vektorfält i planet~~ kan ges som

$$\bar{F} = \bar{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) =$$

ej derivata

$$= F_1(x,y)\,\bar{i} + F_2(x,y)\,\bar{j}$$

men det är ibland bättre att använda polära koordinater:

$$\bar{F} = \bar{F}(r,\theta) = F_r(r,\theta)\,\hat{r} + F_\theta(r,\theta)\,\hat{\theta},$$

4

där $\hat{r} = (\cos\theta)\bar{i} + (\sin\theta)\bar{j}$

$\hat{\theta} = -(\sin\theta)\bar{i} + (\cos\theta)\bar{j}$

} enhetsvektorer

$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$ så ortogonala

$F_r(r,\theta)$ är radiella komponenten

$F_\theta(r,\theta)$ " " transversella " "

} av $\bar{F}$.

$$d\bar{r} = dr\cdot\hat{r} + r\,d\theta\cdot\hat{\theta}$$

(infinitesimala uppdelningen av $d\bar{r} = dx\cdot\bar{i} + dy\,\bar{j}$)

Så $r = f(\theta)$ är en fältlinje om

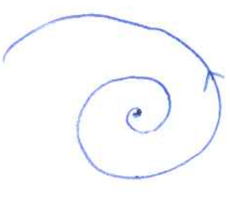
$d\bar{r} \parallel \bar{F}$

dvs $\boxed{\dfrac{dr}{F_r(r,\theta)} = \dfrac{r\,d\theta}{F_\theta(r,\theta)}}$

<u>Ex.</u> Skissa vektorfältet $F(r,\theta) = \hat{r} + \hat{\theta}$, och hitta fältlinjerna!

$F_r = 1,\ F_\theta = 1$

$$\frac{dr}{1} = \frac{r\,d\theta}{1}$$



$\dfrac{dr}{d\theta} = r$, $\boxed{r = Ce^{\theta}}$

utåtgående spiraler

5.2 Konservativa fält.

Gradient Om ϕ är ett skalärfält är gradienten $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) =$
$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k}$.

Gradienten blir då ett vektorfält.

FRÅGA: Är alla vektorfält av formen $\nabla\phi$?

SVAR: NEJ, inte alls!

Varför? Jo, vi vet ju att mixade andraderivator inte beror på ordningen, så, om $\bar{F} = \nabla\phi$, dvs $F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, $F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}$, $F_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z}$, så gäller att

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.}$$

Det är lätt att hitta på $\bar{F}$ så att dessa villkor inte är uppfyllda!

Def. Vektorfältet $\bar{F}$ är <u>konservativt</u> i D $(\subset \mathbb{R}^n)$ om $\bar{F} = \nabla \phi$ för något skalärt fält ϕ. Funktionen ϕ kallas för <u>potentialfältet</u>.

[huvudsakligen $\mathbb{R}^3$, men även i $\mathbb{R}^2$ och allmänt $\mathbb{R}^n$].

Ex. Gravitationsfältet är konservativt.

$$\bar{F}(\bar{r}) = -\frac{km(\bar{r}-\bar{r}_0)}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^3}$$ eftersom

$$\phi = \frac{km}{|\bar{r}-\bar{r}_0|}$$ är en potential: $\nabla \phi = \bar{F}$.

Obs att $$\frac{\partial}{\partial x}|\bar{F}| = \frac{\bar{F}\cdot \frac{\partial}{\partial x}\bar{F}}{|\bar{F}|}$$

Anm. Många klassiska fält i fysiken är konservativa. Orsaken är troligtvis att man inte kan utvinna gratisenergi ur fält om dessa är konservativa.

Vår tidigare observation om konservativa fält skriver vi ned ordentligt:

SATS Om $\bar{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\bar{k}$ är konservativt så gäller att

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

För ett konservativt fält $\bar{F}$ finns en potentialfunktion ϕ $(\bar{F} = \nabla\phi)$,

och $\{\bar{r} : \phi(\bar{r}) = C\}$ beskriver en yta, som kallas ekvipotentialyta.

Ekvipotentialytan är ortogonal mot de flödeslinjer som skär den.

Ex. (2D) $\bar{F} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\bar{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\bar{j}$

θ = vinkeln från $\bar{O}$ till (x,y)

$0 \le \theta \le 2\pi$ antas

Visa att $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ utom i $(0,0)$.

(b) $\nabla \Theta = \bar{F}$ så länge som $0 < \Theta < 2\pi$.

(c) $\bar{F}$ är ej konservativt i hela planet bortsett från $\bar{0}$.

(Ty Θ har diskontinuitet längs med pos. x-axeln)

Källor, sänkor.

$\phi = -\frac{m}{|\bar{r}|}$ har motsv. $\nabla \phi = \frac{m}{|\bar{r}|^3}\bar{r}$ säges ha en $\boxed{\text{källa}}$ av styrka m i origo. $(m>0)$

Om vi byter tecken,

$\phi = \frac{m}{|\bar{r}|}$ så är $\nabla \phi = -\frac{m}{|\bar{r}|^3}\bar{r}$ vilket har ett $\boxed{\text{sänka}}$ i origo med styrka m.