F14 Tis 28/4 kl 08-10 i $\boxed{E1}$.

15.3. Kurvintegraler.

15.4. Kurvintegraler av vektorfält.

Rek uppg.: 15.3: 7, 11
15.4: 1, 5, 7, 15.

15.3. Kurvintegraler.

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = ?$$

ds = båglängdselementet

parametrisera $\bar{r}=\bar{r}(t)$ dvs $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\boxed{a \leq t \leq b}$

$$\text{längd}(C) = \int_C ds \qquad ds = |\bar{r}'(t)|\,dt$$

Mer allmänt

$$\boxed{\int_C f\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t))\,|\bar{r}'(t)|\,dt}$$

②

Ex. $I = \int_C (x^2+y^2)\,ds$, C: linjestycket från $\bar{O}$ till $(2,1)$.

Ex. Finn tyngdpunkten för cirkulära spiralhelixen

$$\bar{r} = a\cos t\,\bar{i} + a\sin t\,\bar{j} + bt\,\bar{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

15.4. Kurvintegraler av vektorfält.

$\bar{F}$ vektorfält i $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{C}$ kurva

$d\bar{r} = \hat{T}\,ds$, $\hat{T}$ enhetsvektor i tangentriktningen

$d\bar{r} = (dx, dy, dz)$ som vektor.

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = (F_1, F_2, F_3)\cdot(dx, dy, dz) = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

också: $\bar{F}\cdot d\bar{r} = \bar{F}\cdot\hat{T}\,ds = (\bar{F}\cdot\hat{T})\,ds$

integral m.a.p. ds

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = \int_C (\bar{F}\cdot\hat{T})\,ds$$

Om C är en sluten kurva,

säger vi att

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \text{cirkulation av } \bar{F} \text{ runt } C.$$

Ex. $\bar{F} = y^2\,\bar{i} + 2xy\,\bar{j}$. Beräkna $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$

från $(0,0)$ till $(1,1)$ längs med

(a) räta linjen $y = x$,

(b) kurvan $y = x^2$,

(c) längs med linjesegment $(0,0) \to (0,1) \to (1,1)$.

Def. D är sammanhängande om varje två punkter i D kan sammanbindas inom D av en glatt kurva.

Def. Ett enkelt sammanhängande område D är ett där varje enkel sluten kurva kan kontinuerligt deformeras till en punkt utan att lämna D.

(1) (2) (3)

SATS. Låt D vara ett öppet sammanhängande område, och $\overline{F}$: ett vektorfält på D. Då är följande ekvivalenta:

(a) $\overline{F}$ är konservativt på D,

(b) $\displaystyle\int_C \overline{F}\cdot d\overline{r} = 0$ för varje glatt sluten kurva C i D.

(c) Givet två punkter P_0 och P_1 i D, så har $\displaystyle\int_C \overline{F}\cdot d\overline{r}$ samma värde för alla kurvor C som går från P_0 till P_1 inom D.

OBS: Om ϕ är potentialen till $\overline{F}$, dvs $\overline{F} = \nabla\phi$, så har vi att

$$\int_{P_0}^{P_1} \overline{F}\cdot d\overline{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0).$$

(5)

Ex. För vilka värden på A, B är

$$\bar{F} = Ax\sin(\pi y)\,\bar{i} + \left(x^2\cos(\pi y) + By\,e^{-z}\right)\bar{j} + y^2 e^{-z}\,\bar{k}$$

konservativt? Beräkna sedan för detta val av A, B integralen $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$, där

(a) $\bar{r} = \cos t\,\bar{i} + \sin(2t)\,\bar{j} + (\sin^2 t)\,\bar{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) Snittet av paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ och planet $z = 3x - 2y$ från $(0,0,0)$ till $(1, \frac{1}{2}, 2)$.

Ex. $I = \oint_C (e^x \sin y + 3y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$

moturs längs ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$. $I = ?$