~~[illegible]~~ ~~Nadine~~

F15 Ons 29/4 kl 10-12 i $\boxed{D1}$ 1

15.5. Ytor och ytintegraler

15.6. Orienterade integraler och flödesintegraler.

Rek. uppg.: 15.5: 1, 7, 13

15.6: 5, 9, 13, 15

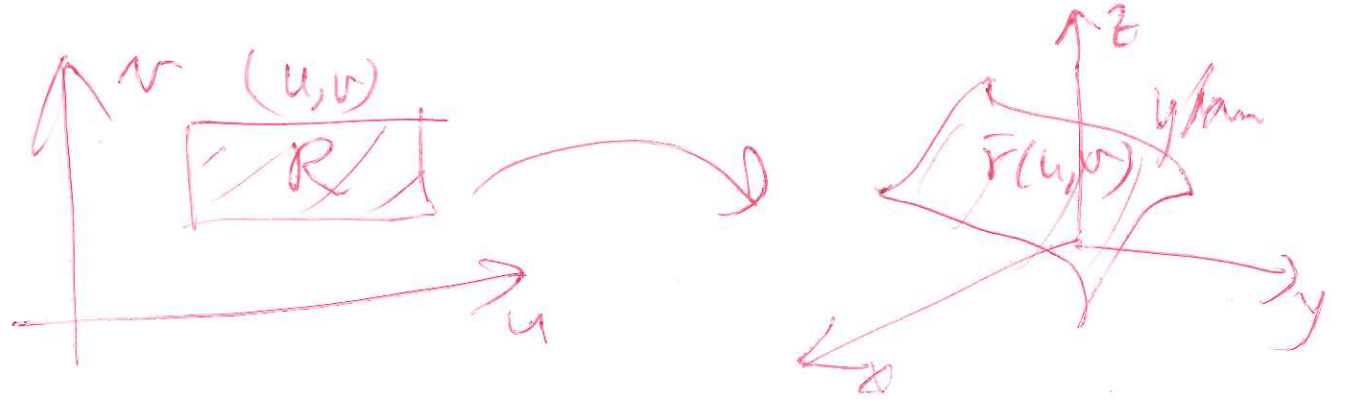
15.5. Ytor och ytintegraler.

Parametrisering av en yta:

$\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

när (u,v) genomlöper ~~ett~~ rektangel R

är en parametrisk yta. (LB S. 887)



②

Här handlar det alltså om en yta med rand. Randen är bilden av rektangelns rand tänker vi oss.

Ex. En graf $z = f(x,y)$, $(x,y) \in R$, kan parametriseras av

$$\begin{cases} \bar{r}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \\ (u,v) \in R. \end{cases}$$

Observera: Här används bara rektangeln R som basområde för en parametrisering. Mer allmänt kan man använda ett mer generellt område D (inuti $\mathbb{R}^2$).

Ex. Bestäm geometriskt ytan

$$\bar{r} = (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v)$$

$$0 \leq u \leq 2\pi$$

$$0 \leq v \leq \pi/2$$

(Sfäriska koordinater!)

Anm. Parametriseringar som är 1-1 åtminstone i det inre av R kan vara rätt degenererade på randen. T.ex. kan randen av R avbildas på en enda punkt och i så fall blir bildytan sluten.

Ex. Ytan med sfäriska koord. om $0 \le v \le \pi$, $0 \le u \le 2\pi$. Sfär av radie a sluten!

Kompositytor. Uppstår då vi använder olika parametriseringar och "limmar ihop".

Vi vill kunna definiera

$$\iint_S f \, dS \qquad S = \text{en yta.}$$

DEF (av glatt yta) En mängd S i $\mathbb{R}^3$ är en glatt yta om varje punkt $P \in S$ har en omgivning N ~~som~~ för vilken

④

$N \cap S$ kan beskrivas som

(i) $N \cap S = \{Q \in N : g(Q) = 0\}$, nollnivåyta

där g är glatt och

(ii) $\nabla g(Q) \neq \bar{0}$ för $Q \in N \cap S$.

$\underbrace{\bar{r}(u,v)}_{\text{ortsvektorn}}$ är en vektor ~~fr~~ som ändrar sig med (u,v).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u,v) & \text{— partialderiva m.a.p. } u, \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u,v) & \text{— '' '' } v. \end{cases}$$

Dessa är två tangentvektorer till ytan.
En normalvektor fås av kryssprodukten

$$\boxed{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}$$

$$dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$ skalärt ytelement

$$d\bar{S} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\, du\,dv$$ vektoriellt ytelement.

T.ex.

$$\text{yta}(S) = \iint_S dS = \iint_R \left|\frac{\partial \bar r}{\partial u} \times \frac{\partial \bar r}{\partial v}\right| du\,dv$$

Om ytan är en graf ~~tex~~ $\cancel{z} = g(x,y)$, $(x,y) \in D$,

så är $\bar r(u,v) = (u, v, g(u,v))$, $(u,v) \in D$

en parametrisering,

och

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar r}{\partial u} = \left(1, 0, \dfrac{\partial g}{\partial u}\right) \\ \dfrac{\partial \bar r}{\partial v} = \left(0, 1, \dfrac{\partial g}{\partial v}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \bar r}{\partial u} \times \frac{\partial \bar r}{\partial v} = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \partial g/\partial u \\ 0 & 1 & \partial g/\partial v \end{pmatrix} =$$

$$= e_1 \begin{vmatrix} 0 & \partial g/\partial u \\ 1 & \partial g/\partial v \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & \partial g/\partial u \\ 0 & \partial g/\partial v \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\partial g/\partial u, -\partial g/\partial v, 1\right)$$

så att $\left|\dfrac{\partial \bar r}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar r}{\partial v}\right| = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2}$ (Pythagoras)

och $$\iint_S f\,dS = \iint_D f(u,v,g(u,v)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2}\, du\,dv$$

$$= \iint_D f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy.$$

Ex. Beräkna $\iint_S z\,dS$ över konytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$

mellan $z=0$ och $z=1$.

Geometrisk betraktelse:

$z = g(x,y)$ funktionsyta

$$dS = \frac{|\bar{n}|}{\underbrace{|\bar{n}\cdot\bar{k}|}_{z\text{-komponenten}}}\,dxdy$$

Om t.ex S ges av ekvationen $G(x,y,z)=0$,

så $dS = \left|\dfrac{\nabla G(x,y,z)}{\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)}\right| dxdy$ så att

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\,\frac{|\nabla G(x,y,z)|}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)\right|}\,dxdy$$

1.6 Orienterade ytor & flödesintegraler

Vi kan dela upp $d\bar{S} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\, du dv$ som

$$d\bar{S} = \hat{N}\, dS, \quad \text{där alltså}$$

$$dS = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right| du dv$$ är ytelementet och

$$\hat{N} = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right|}$$ är en normaliserad normalvektor.

Valet av riktning för normalvektorn är denna gång passivt eftersom det beror på ordningen (u, v) [byt $u \to v$, $v \to u$ så byts riktningen]

men man kan också göra ett aktivt val mellan $\hat{N}$ och $-\hat{N}$.

Om vi på detta vis kan göra en konsistent orientering (dvs val av normal) över hela ytan sägs ytan vara <u>orienterbar</u>.

<u>Anm.</u> Alla ytor är inte orienterbara: Möbiusbandet är ett ex!

DEF. Flödet av vektorfältet $\bar{F}$ över den orienterbara ytan S är

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_S (\bar{F} \cdot \hat{N})\, dS.$$

Obs: När ytan är sluten skriver vi $\oiint$.
I så fall talar vi om flödet ut om $\hat{N}$ är utåtriktad eller flödet in om $\hat{N}$ är inåtriktad.

Ex. Finn flödet av $\bar{F} = m\bar{r}/|\bar{r}|^3$ ut ur en sfär S av radie a med centrum i $\bar{O}$.

Ex. Beräkna flödet av $\bar{F} = (x, y, z)$ genom cylinderytan till massiva cylindern $x^2+y^2 \leq a^2$, $-h \leq z \leq h$.

⑨

Så ;

parameterfallet

$$d\bar{S} = \hat{N}\,dS = \pm\bar{n}\,du\,dv, \quad \bar{n} = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right|}.$$

val av riktning

och om ytan ges som nivåyta $G(x,y,z)=0$,

så $$d\bar{S} = \hat{N}\,dS = \pm\frac{\nabla G(x,y,z)}{\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)}\,dx\,dy.$$

Ex. Finn flödet av $(z, 0, x^2)$ uppåt genom den del av ytan $z=x^2+y^2$ ovanför kvadraten $-1\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$.