$\boxed{F16}$ Tis 5/5 kl 08-10 i E1.



16.1. Gradient, divergens och rotation.
16.2. Några identiteter med grad, div, & rot.

Rekuppg.: 16.1: 3, 7, 11
16.2: 9, 15, 17.

16.1. Gradient, divergens, och rotation.

$f$ skalärfält:

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}_{\text{vektorfält}} = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$$

grad $f$ blir ett vektorfält.

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)}_{\text{"vektorvärd" differentialoperator}}$$

$\boxed{\text{nablasymbolen}}$

Mer allmänt, om vi har ett vektorfält $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\bar{k}$

finns det 9 st förstaderivator:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z}
\end{array}\right.$$

och vissa kombinationer av dessa är speciellt viktiga:

$$\operatorname{div} \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \nabla \times \bar{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\bar{k}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

<u>OBS!</u> $\nabla \cdot \bar{F}$ och $\bar{F} \cdot \nabla$ blir olika saker!

Ex. Bestäm divergens & rotation för fältet

$$\bar{F} = xy\,\bar{i} + (y^2 - z^2)\,\bar{j} + yz\,\bar{k}.$$

Motsvarande i 2D:

$$\bar{F} = F_1\,\bar{i} + F_2\,\bar{j}$$

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\bar{k}$$

pekar ortogonalt mot planet

Ex. Bestäm div & rot för

$$\bar{F} = x e^{y}\,\bar{i} - y e^{x}\,\bar{j}.$$

Tolkning av divergensen

SATS. $$\operatorname{div} \bar{F}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \overbrace{\iint_{S_\varepsilon} \bar{F} \cdot \underbrace{\hat{N}}_{\text{utåtnormalen}}\, dS}^{\text{flöde genom } S_\varepsilon}$$

$S_\varepsilon$ sfär av radie $\varepsilon$ runt $P$.

Anmärkning: dvs $\dfrac{\text{flöde (ström)}}{\text{vol (klotet)}}$

ger i gräns divergensen!

<u>OBS</u>: Divergenssatsen som kommer senare ger att

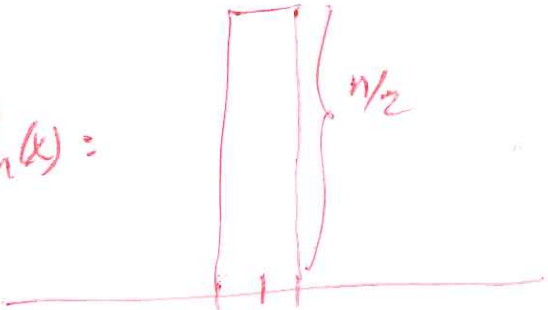
$$\iint_S \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\bar{F}\,dV$$

där $K$ är kroppen som omsluts av $S$.
($S$ antas vara en <u>sluten yta</u>).

<u>Generalisering av funktionsbegreppet.</u>

<u>Distributioner.</u>

$d_n(x)$:



Låt $n \to \infty$.

Då $d_n(x) \to 0$ punktvis utom i $x=0$. Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_n(x) f(x)\,dx = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} f(x)\,dx \longrightarrow f(0)$$

om $f$ är kontinuerlig

Vi tänker oss ett gränsvärde $\delta(x)$ av

$\delta_n(x)$ som inte är en vanlig funktion,

men har egenskapen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0) \text{ för kontinuerliga } f.$$

Detta blir en distribution.

Obs att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(x-t)}_{=\delta(t-x)} f(t)\, dt = f(x).$$

Ex. Om $\bar{F} = \frac{m\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$ så ser vi att $\text{div}\, \bar{F} = 0$ där $\bar{r} \neq \bar{0}$,

men att $\bar{F}$ producerar ett flöde $4\pi m$ genom varje sfär runt $\bar{O}$. Så vi kan skriva

$$\text{div}\, \bar{F} = 4\pi m \underbrace{\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)}_{\text{massa bara i } \bar{O}}$$

## Tolkning av rotationen.

Grovt säger rotationen rot $\bar F(P)$ hur vektorfältet "roterar" runt den givna punkten $P$.

**SATS.**

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \bar F \cdot d\bar r = \hat N \cdot \operatorname{rot} \bar F(P)$$

Om $C_\varepsilon$ är en cirkel av radie $\varepsilon$ runt $P$ som begränsar en skiva $S_\varepsilon$ med enhetsnormal $\hat N$. Riktningen på $\hat N$ beror på $C_\varepsilon$ enligt skruvregeln!


## 16.2 Några identiteter med grad, div, rot.

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\operatorname{div} \bar F = \nabla \cdot \bar F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \bar F = \nabla \times \bar F = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Laplacen

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Laplacen kan tillämpas på ett skalärfält $f$ och vi får då ett skalärfält $\nabla^2 f$.

Laplacen kan även tillämpas på ett vektorfält $\bar{F}$ och då är $\nabla^2 \bar{F}$ ett vektorfält ($\nabla^2$ verkar komponentvis).

$$\nabla^2 \bar{F} = (\nabla^2 F_1)\bar{i} + (\nabla^2 F_2)\bar{j} + (\nabla^2 F_3)\bar{k} =$$

$$= (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3).$$

<u>Anm.</u> $\phi$ är harmonisk på $D$ om $\nabla^2 \phi = 0$ på $D$.

---

<u>OBS!</u> $$(\bar{G} \cdot \nabla)\bar{F} = \left(G_1 \frac{\partial}{\partial x} + G_2 \frac{\partial}{\partial y} + G_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\overbrace{(F_1, F_2, F_3)}^{\bar{F}}$$

$$= G_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + G_2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + G_3 \frac{\partial \bar{F}}{\partial z}$$

(kan även delas upp komponentvis!)

## SATS.

$\phi, \psi$ : skalärfält
$\bar{F}, \bar{G}$ : vektorfält

tillräckligt glatta, dvs har kont. derivator av tillr hög grad.

(a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(b) $\nabla\cdot(\phi\bar{F}) = (\nabla\phi)\cdot\bar{F} + \phi(\nabla\cdot\bar{F})$

(c) $\nabla\times(\phi\bar{F}) = (\nabla\phi)\times\bar{F} + \phi(\nabla\times\bar{F})$

(d) $\nabla\cdot(\bar{F}\times\bar{G}) = (\nabla\times\bar{F})\cdot\bar{G} - \bar{F}\cdot(\nabla\times\bar{G})$

(e)
$$\nabla\times(\bar{F}\times\bar{G}) = (\nabla\cdot\bar{G})\bar{F} + (\bar{G}\cdot\nabla)\bar{F} - (\nabla\cdot\bar{F})\bar{G} - (\bar{F}\cdot\nabla)\bar{G}$$

(f)
$$\nabla(\bar{F}\cdot\bar{G}) = \bar{F}\times(\nabla\times\bar{G}) + \bar{G}\times(\nabla\times\bar{F}) + (\bar{F}\cdot\nabla)\bar{G} + (\bar{G}\cdot\nabla)\bar{F}$$

(g) $\nabla\cdot(\nabla\times\bar{F}) = 0$ [div rot $= 0$]

(h) $\nabla\times(\nabla\phi) = \bar{0}$ [rot grad $= 0$]

(i) $\nabla\times(\nabla\times\bar{F}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{F}) - \nabla^2\bar{F}$ (rot rot = grad div − Laplaceop)

Def. $\bar{F}$ är divergensfritt om div $\bar{F} = 0$.

$\bar{F}$ är rotationsfritt om rot $\bar{F} = \bar{0}$.

Så (g) och (h) av satsen säger att

| |
|---|
| Varje konservativt fält är rotationsfritt |
| Rotationen av ett vektorfält är divergensfritt. |

Vi har tidigare sett att rot $\bar{F} = \bar{0}$ medför att $\bar{F}$ är lokalt konservativt.

På samma sätt ger villkoret div $\bar{F} = \nabla \cdot \bar{F} = 0$ att $F =$ rot $\bar{G}$ ~~där~~ för något vektorfält $\bar{G}$. Ett sådant vektorfält kallas för vektorpotential till F.

Ex. Visa att $\bar{F} = (x^2+yz)\bar{i} - 2y(x+z)\bar{j} + (xy+z^2)\bar{k}$ är divergensfritt och finn en vektorpotential till fältet.