F17 Fre 8/5 kl 08-10 i E1.

16.3 Greens sats i planet.

16.4. Divergenssatsen i rummet.

Rek upp: 16.3: 3, 5, 9
16.4: 5, 11, 15

16.3. Greens sats i planet

Anm.: Analysens huvudsats säger att $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = \Big[f(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$

skrivsätt

(eftersom f är primitiv till f').

Vi kan tänka på VL som en 1D integral, och HL som en 0D integral (med orientering!). över randen!

Analogt är Greens sats en identitet där VL är en 2D integral och HL är en 1D integral (längs med randen!)

SATS (Greens formel)

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \oint_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy$$

där R är ett "snällt" område med randkurva (eller kurvor) $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ ges därvid en orientering som är moturs på ytterranden och medurs på eventuella innerränder.

"positivt orienterad"

Anm:

Vi kan skriva formeln som

$$\iint_R \cancel{dA} (\operatorname{rot} \bar{F}) \cdot \bar{k}\, dA = \oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

där $\begin{cases} \bar{F} = (F_1, F_2, 0) \\ \bar{k} = (0,0,1) \\ d\bar{r} = (dx, dy, 0). \end{cases}$

Ex. Om

(1) $\bar{F} = x\bar{j} = (0, x, 0)$

(2) $\bar{F} = -y\bar{i} = (-y, 0, 0)$

(3) $\bar{F} = \frac{1}{2}(-y\bar{i} + x\bar{j}) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, 0)$

så är i vardera fallen

$$\boxed{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1}.$$

Så, enligt Greens sats har vi att

$$\oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \iint_R 1\,dA =$$

$$= \text{area}(R).$$

Ex. Tillämpa ovanstående på elliptiska skivan som har begränsningskurva

$$C: \ \bar{r}(t) = 3(\cos t + \sin t)\,\bar{i} + 2(\sin t - \cos t)\,\bar{j},$$

$$0 \le t \le 2\pi.$$

④

Ex. Låt $\mathcal{C}$ vara en positivt orienterad sluten kurva i planet, som omsluter ett område R och $\mathcal{C}$ inte passerar genom $\bar{O}$.

Visa att

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0 & \text{om } \bar{O} \notin R \\ 2\pi & \text{om } \bar{O} \in R. \end{cases}$$

Divergenssatsen i planet.

$$\iint_R \operatorname{div} \bar{F}\, dA = \oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot \overset{\text{utåtriktad}}{\hat{N}}\, ds$$

Bevis: $\displaystyle \iint_R \operatorname{div} \bar{F}\, dA = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA =$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dA \overset{\text{Greens sats}}{=} \oint_{\mathcal{C}} \underbrace{\bar{G} \cdot d\bar{r}}_{G_1 dx + G_2 dy} =$$

$\begin{cases} G_1 = -F_2 \\ G_2 = F_1 \end{cases}$

$$= \oint_{\mathcal{C}} -F_2\,dx + F_1\,dy = \int_{\mathcal{C}} (F_1, F_2) \cdot \underbrace{(dy, -dx)}_{\hat{N} ds}$$

16.4. Divergenssatsen i rummet.

SATS (GAUSS)

$$\iiint_D \operatorname{div} \bar{F}\, dV = \oiint_S \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS,$$

om D är en kropp med randyta S, och S är tillräckligt glatt, och $\hat{N}$ är utåtnormalen.

Ex. $\bar{F} = bxy^2\bar{i} + bx^2y\bar{j} + (x^2+y^2)z^2\bar{k}$

S randytan till $R: \begin{cases} x^2+y^2 \le a^2 \\ 0 \le z \le b \end{cases}$ (cylinder)

Bestäm $\oiint_S \bar{F}\cdot d\bar{S}$ = flödet.

Ex. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Använd $\bar{F}$ för beräkning av volymen på kon med basarea A och höjd h.

$\bar{F}\cdot\hat{N} = 0$ längs med

$\neq 0$ bara på ovansidan!

$\frac{1}{3}\,\text{area}(D)\cdot h.$

Varianter på divergenssatsen

SATS (Varianter):

(a) $$\iiint_D \operatorname{rot} \bar{F} \, dV = -\oint\!\!\oint_S \bar{F} \times \hat{N} \, dS$$

(b) $$\iiint_D \operatorname{grad} \phi \, dV = \oint\!\!\oint_S \phi \hat{N} \, dS.$$