

(F17)

Fre 8/5 kl 08-10 i E1.

(1)

16.3 Greens sats i planet.

16.4 Divergenssatsen i rummet.

Rek upp: 16.3 = 3, 5, 9

16.4 = 5, 11, 15

16.3. Greens sats i planet

Anm.: Analysens huvudsats säger

att 
$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = \left[ f(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

(eftersom  $f$  är primitiv till  $f'$ ).

↑  
stevsats

Vi kan tänka på  $V$  som en 1D integral, och

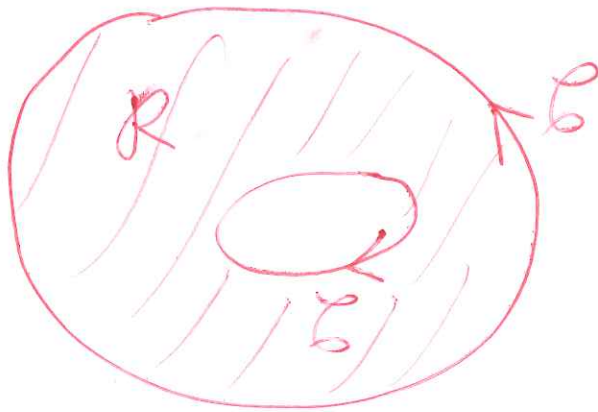
$HL$  som en 0D integral (med orientering!).  
övervakaren!

Analogt är Greens sats en identitet  
där  $V$  är en 2D integral och  $HL$  är en 1D  
integral (längs med kanten!).

SATS (Greens formel)

$$\iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C F_1 dx + F_2 dy$$

där  $R$  är ett "smält" område med räkna (eller kurvor)  $C$ .  $C$  ges därvid en orientering som är moturs på utåt ränder och medurs på eventuella inåtränder.



"positivt orienterad"

Anmär:

Vilken stavira formeln som

$$\iint_R \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} dA = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där  $\vec{F} = (F_1, F_2, 0)$   
 $\vec{k} = (0, 0, 1)$   
 $d\vec{r} = (dx, dy, 0)$ .

③

Ex. Om

$$(1) \vec{F} = x\vec{j} = (0, x, 0)$$

$$(2) \vec{F} = -y\vec{i} = (-y, 0, 0)$$

$$(3) \vec{F} = \frac{1}{2}(-y\vec{i} + x\vec{j}) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, 0\right)$$

så är i vardera fallen

$$\boxed{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1}$$

Så, enligt Greens sats har vi att

$$\begin{aligned} \oint_C x dy &= - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \iint_R 1 dA = \\ &= \text{area}(R), \end{aligned}$$

Ex. Tillämpa parametrering på elliptiska  
skivan som har begränsningskurva

$$C: \vec{r}(t) = 3(\cos t + 8\sin t)\vec{i} + 2(\sin t - \cos t)\vec{j}, \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Ex. Låt  $C$  vara en positivt orienterad ④  
 sluten kurva i planet, som omsluter ett  
 område  $R$  och  $C$  inte passerar genom  $\bar{0}$ .

Visa att

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & \text{om } \bar{0} \notin R \\ 2\pi & \text{om } \bar{0} \in R. \end{cases}$$

Divergenssatsen i planet.

$$\iint_R \operatorname{div} \bar{F} \, dA = \oint_C \bar{F} \cdot \hat{N} \, ds$$

utriktad

Bevis:  $\iint_R \operatorname{div} \bar{F} \, dA = \iint_R \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA =$

$$= \iint_R \left( \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dA \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_C \underbrace{\bar{G}}_{G_1 dx + G_2 dy} \cdot d\bar{r} =$$

$$\begin{cases} G_1 = -F_2 \\ G_2 = F_1 \end{cases}$$

$$= \oint_C -F_2 dx + F_1 dy = \int_C (F_1, F_2) \cdot \underbrace{(dy, -dx)}_{\hat{N} ds}$$

16.4. Divergenssatsen i rummet.

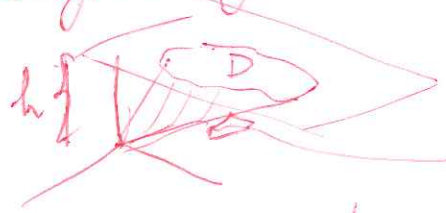
SATS (GAUSS)  $\iiint_D \operatorname{div} \vec{F} dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS,$

om  $D$  är en kropp med randytan  $S$ , och  $S$  är tillräckligt glatt, och  $\hat{N}$  är utåtriktad.

Ex.  $\vec{F} = bxy^2 \vec{i} + bx^2y \vec{j} + (x^2+y^2)z^2 \vec{k}$   
 $S$  randytan till  $R = \begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ 0 \leq z \leq b \end{cases}$  (cylinder)

Bestäm  $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  = flödet.

Ex.  $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Använd för beräkning av volymen på kon med basarea  $A$  och höjd  $h$ .



$\vec{F} \cdot \hat{N} = 0$  längs med  $\neq 0$  bara på toppsidan!

$\frac{1}{3} \operatorname{area}(D) \cdot h.$

## Varianten zu Divergenzsatzen

6

SATZ (Varianten):

$$(a) \quad \iiint_D \operatorname{rot} \bar{F} \, dV = - \iint_S \bar{F} \times \hat{N} \, dS$$

$$(b) \quad \iiint_D \operatorname{grad} \phi \, dV = \iint_S \phi \hat{N} \, dS.$$