F18 Mån 11/5 kl 08-10 i E1

16.5. Stokes sats i rummet.

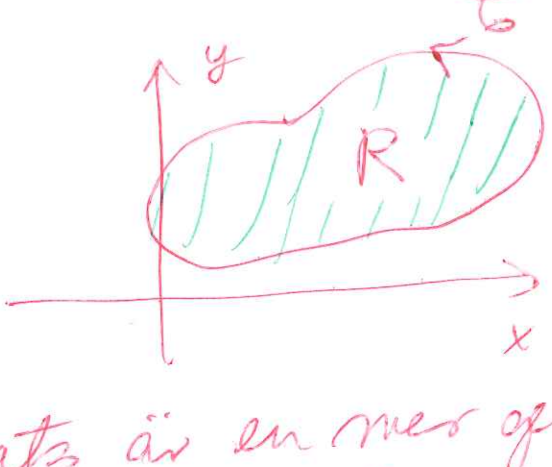
Rek uppg.: 16.5: 1,3,5.

16.5. Stokes sats i rummet.

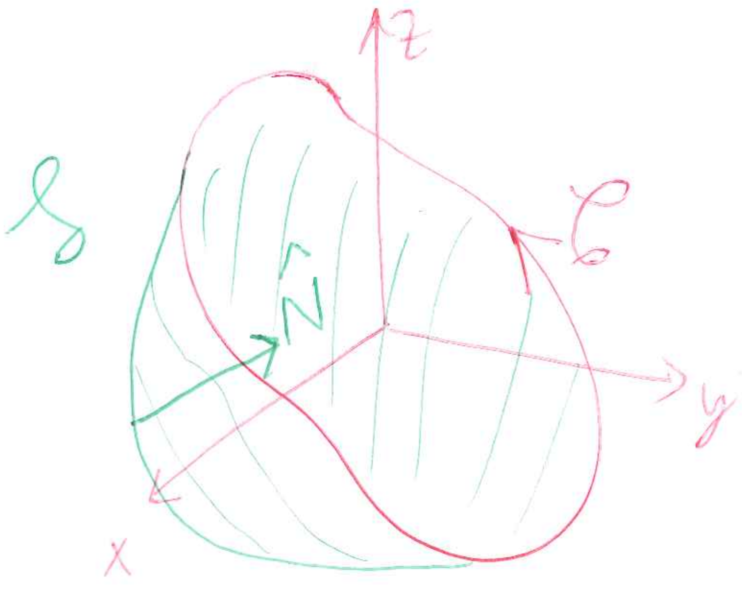
Vi minns att Greens formel säger att

$$\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{\bar{F}\cdot d\bar{r}}_{F_1dx+F_2dy} = \iint_R \underbrace{(\text{rot}\,\bar{F})\cdot\bar{k}}_{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}\,dA \qquad (*)$$

Om $\mathcal{C}$ omsluter R i positiv led.



Stokes sats är en mer generell variant av (*) som gäller för slutna kurvor i rummet.



SATS (Stokes)

fältets arbete längs med C

$$\underbrace{\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r}} = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{F}) \cdot \hat{N} \, dS$$

Här är C en sluten kurva i rummet, och S en yta i rummet vars "rand" är C.

OBS! (1) Det finns många sådana ytor S till en given kurva C.

(2) Normalen bestäms enligt skruvregeln (högerskruv).

Vi ser ett samband med konservativa fält! ③

(1) $\bar{F}$ är konservativt $\Leftrightarrow$ $\bar{F} = \nabla\phi$ för någon pot ϕ.

(2) $\bar{F}$ är konservativt $\Leftrightarrow$ $\oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$.

(3) vi ser ur (1) att $\bar{F}$ konservativt $\Rightarrow$ $\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}$ (rotationsfritt).

(4) Vi ser ur Stokes sats att $\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_{\mathcal{S}} \underbrace{(\operatorname{rot} \bar{F})}_{=\bar{0}} \cdot \hat{N}\, dS = 0$$

$\Rightarrow$ $\bar{F}$ är konservativt.

Dvs:

$$\boxed{\bar{F} \text{ konservativt} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}}$$

gäller lokalt.

4

__Ex.__ Beräkna $\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ om

$\bar{F} = -y^3\bar{i} + x^3\bar{j} - z^3\bar{k}$, och $\mathcal{C}$ är snittkurvan mellan planet $2x+2y+z=3$ och cylindern $x^2+y^2=1$. (motursprojektion av $\mathcal{C}$ på xy-planet).

$\hat{N}\,dS = (2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k})\,dxdy$ för ytan $\mathcal{S}$.

$\text{rot}\,\bar{F} = 3(x^2+y^2)\bar{k}$.

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_{\mathcal{S}} (\text{rot}\,\bar{F}) \cdot \hat{N}\,dS = \iint_{R} 3(x^2+y^2)\,dxdy$$

$R:\ x^2+y^2 \le 1$.

SVAR: $\frac{3\pi}{2}$.

__Ex.__ Beräkna $I = \iint_{\mathcal{S}} (\text{rot}\,\bar{F}) \cdot \hat{N}\,dS$, där

$\mathcal{S}$ är den del av sfären $x^2+y^2+(z-2)^2 = 8$ som ligger ovanför xy-planet, $\hat{N}$ är enhetsnormalfältet utåt på $\mathcal{S}$, och $\bar{F} = y^2\cos xz\,\bar{i} + x^3 e^{yz}\bar{j} - e^{-xyz}\bar{k}$.

Tips: använd Stokes till att byta ytan till plan yta!