1

25/3 F2

kl 10–12
D1

11.1 Vektorvärda funktioner i en variabel.

11.2 Tillämpning av vektorderivering.

11.3. Kurvor och parametriseringar.

Rek. uppg. 11.1: 17, 21, 33
11.2: 3
11.3: 5, 7, 11, 13, 15.

11.1 Vektorvärda funktioner av en variabel

En partikels rörelse med tiden t kan beskrivas i tre kartesiska koordinater;

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t = \text{tid}.$$

②

Det är ofta fördelaktigt att ersätta dessa tre ekvationer med en enda:

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad \text{där } \bar{r} = (x, y, z).$$

Om vi inför $\begin{cases} \bar{i} = (1,0,0) \\ \bar{j} = (0,1,0) \\ \bar{k} = (0,0,1) \end{cases}$

får vi

$$\bar{r} = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}.$$

Genomsnittshastigheten mellan t och $t + \Delta t$

är $\dfrac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$ (vektorvärd)

och vi definierar hastigheten (v=velocity)

$$\bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\bar{r}(t)$$

Motsvarande skalär är farten

$$v(t) = |\bar{v}(t)|.$$

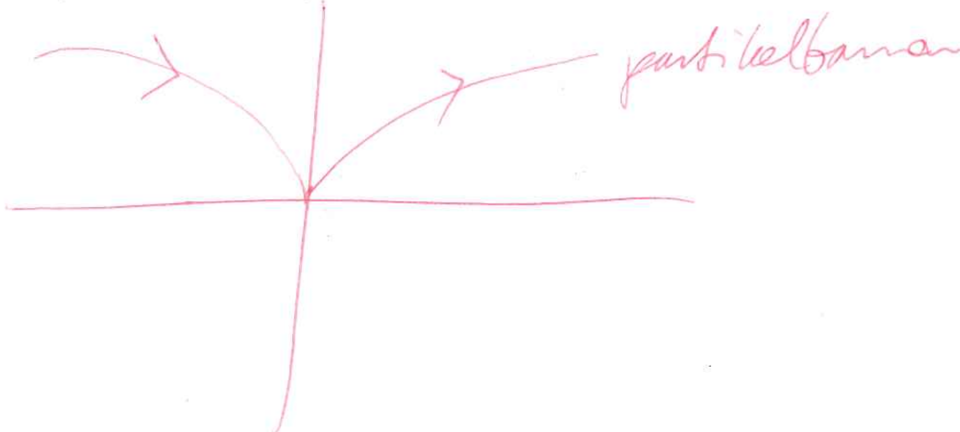
3

s! När helst hastighetsvektorn existerar (partikelbanan!) kontinuerligt och $\neq \bar{0}$ är kurvan glatt (C^1). Men kurvan måste inte vara glatt där hastigheten $= \bar{0}$.

Ex.(2D) $\bar{r} = t^3 \bar{i} + t^2 \bar{j}$ glatt samband,

men $\bar{r}'(t) = 3t^2 \bar{i} + 2t \bar{j}$ är $= \bar{0}$ om $t = 0$.

Och kurvan är ej glatt i $t = 0$:



$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$ är accelerationen

Newtons andra lag: $\bar{F} = m\bar{a}$.

Ex. Kurvan $\bar{r} = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k}$.

Ange hastighet och accelerationen i punkten $(1,1,1)$.

Vilken tid?

$$\begin{cases} t = 1 \\ t^2 = 1 \\ t^3 = 1 \end{cases} \iff t = 1$$

$$\bar{r}' = \bar{i} + 2t\bar{j} + 3t^2\bar{k} \underset{t=1}{=} \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} = (1,2,3).$$

hastigheten

$$\bar{r}'' = 2\bar{j} + 6t\bar{k} \underset{t=1}{=} 2\bar{j} + 6\bar{k} = (0,2,6)$$

accelerationen.

Användbara räknelagar:

(a) $\frac{d}{dt}\left(\bar{u}(t)+\bar{v}(t)\right)=\bar{u}'(t)+\bar{v}'(t)$

(b) $\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\bar{u}(t)\right)=\lambda'(t)\bar{u}(t)+\lambda(t)\bar{u}'(t).$

(c) $\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\bar{u}(t)\cdot\bar{v}(t)}_{\text{skalärprodukt}}\right)=\bar{u}'(t)\cdot\bar{v}(t)+\bar{u}(t)\cdot\bar{v}'(t).$

(d) $\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\bar{u}(t)\times\bar{v}(t)}_{\text{vektorprodukt}}\right)=\bar{u}'(t)\times\bar{v}(t)+\bar{u}(t)\times\bar{v}'(t)$

(e) $\frac{d}{dt}\left(\bar{u}(\lambda(t))\right)=\lambda'(t)\,\bar{u}'(\lambda(t))$ [kedjeregeln]

(f) om $\bar{u}(t)\neq\bar{0}$, så:

$$\frac{d}{dt}|\bar{u}(t)|=\frac{\bar{u}(t)\cdot\bar{u}'(t)}{|\bar{u}(t)|}.$$

Ex. Uitwerken

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{u}\cdot\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\times\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}\right)\right)=?$$

$$\overset{(a)}{=}\underbrace{\frac{d\bar{u}}{dt}\cdot\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\times\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}\right)}_{=0}+\bar{u}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\times\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}\right)=$$

$$=\bar{u}\cdot\left(\underbrace{\frac{d^2\bar{u}}{dt}\times\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}}_{=\bar{0}}+\frac{d\bar{u}}{dt}\times\frac{d^3\bar{u}}{dt^2}\right)$$

$$=\bar{u}\cdot\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\times\frac{d^3\bar{u}}{dt^3}\right).$$

11.2 Tillämpningar av vektorderivering!

Ex. (från LB) Raket vars drivsystem har konstant output (dvs sprutar ut drivmedel i konstant takt).

tid t: raketmassa m, hastighet $v(t)$

tid $t+\Delta t$: raketmassa $m+\Delta m$ $(\Delta m<0)$

hastighet $v(t+\Delta t)=v+\Delta v$.

$$\underbrace{(m+\Delta m)(\bar{v}+\Delta\bar{v})}_{\text{rörelsemängd raket}} + \underbrace{(-\Delta m)(\bar{v}+\underbrace{\bar{v}_e}_{\text{konstant}})}_{\text{drivmedel rörelsemängd}} = m\bar{v}$$

⋮

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\bar{v}_e.$$

$$\bar{v}(T)-\bar{v}(0)=\int_0^T \frac{d\bar{v}}{dt}\,dt = \left(\int_0^T \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\,dt\right)\bar{v}_e$$

$$= -\left(\ln\frac{m(0)}{m(T)}\right)\bar{v}_e$$

om p% brinner upp

$$-\left[\ln\frac{100}{100-p}\right]\bar{v}_e.$$

Ex. $\begin{cases} \dfrac{d\bar{r}}{dt} = 2\bar{i} \times \bar{r}(t) \\ \bar{r}(0) = \bar{i} + 3\bar{j} \end{cases}$ beskriver rörelsen.

Finn $\bar{r}(t)$.

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = 2i \times \overbrace{(x, y, z)}^{\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z} = -2z\bar{j} + 2y\bar{k}$$

$$= (0, -2z, 2y)$$

dvs $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x = \text{konstant} \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\dfrac{dz}{dt} = -4y \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y \quad \dfrac{d^2z}{dt^2} = 2\dfrac{dy}{dt} = -4z \end{cases}$

så att $\quad y = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = A\sin 2t - B\cos 2t.$$

$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 3 \\ z(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \end{cases}$ så att $\bar{r} = \bar{i} + 3\cos 2t\,\bar{j} + 3(\sin 2t)\bar{k}$.

$\boxed{\text{roterande rörelse}}$

11.3 Kurvor och parametriseringar

$$\bar{r} = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}, \quad a \le t \le b$$

beskriver en kurva där t är en genomlöpningsparameter (kan tolkas som tid men måste ej).

Ibland är kurvan implicit angiven (på geometriskt vis t.ex.).

Hur inför vi en parameter?

Ex. linjesegment $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ z = 3x + 1 \end{cases}$ från $(2,0,7)$ till $(3,2,10)$.

Använd $y = t$ som parameter.

Då: $0 \le t \le 2$.

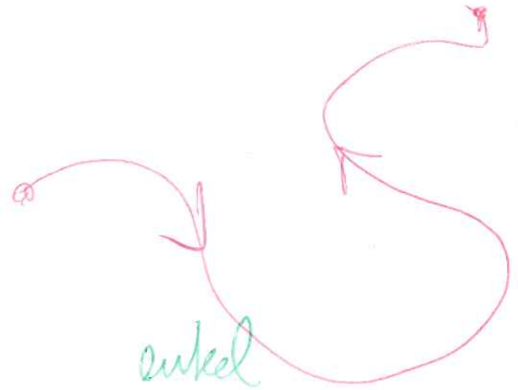
$x = \frac{(y+4)}{2} = \frac{t}{2} + 2$

$z = 3x + 1 = \frac{3t}{2} + 7$

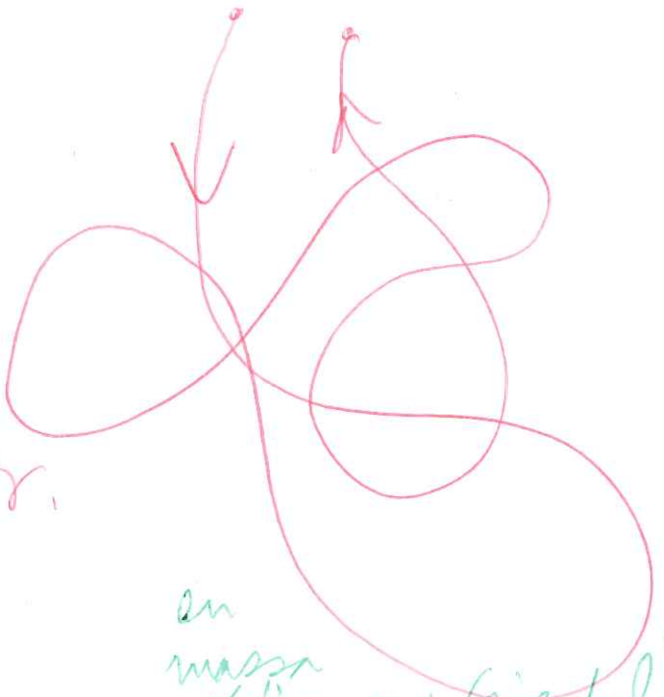
$$\boxed{\bar{r} = \left(\frac{t}{2} + 2,\ t,\ \frac{3t}{2} + 7\right), \quad 0 \le t \le 2.}$$

Utflykning om topologi

Kurvor i planet.



enkel



två kurvor.

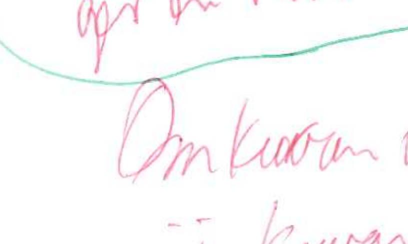
Obs. att parametriseringen ger en riktning!

en massa skärningar (ej enkel)

Om kurvan inte skär sig själv är kurvan **enkel**. Detta begrepp finns även i 3D.

Sluten kurva: om beg. punkt och slutpunkt är samma!

enkel sluten



sluten, ej enkel.

Ex. Parametisera

$$\begin{cases} x^2+y+z=2 \\ xy+z=1 \end{cases} \qquad \left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}+y=1 \text{ (hyperbel)}$$

Bilda diff. av ekv.: $x^2+y-xy=1$.

$$x=t, \quad y=1+t$$

$$z=1-xy=1-t(1+t)=1-t-t^2$$

$$\bar{r}=t\bar{i}+(1+t)\bar{j}+(1-t-t^2)\bar{k}=$$

$$=(t,\ 1+t,\ 1-t-t^2).$$

Båglängd

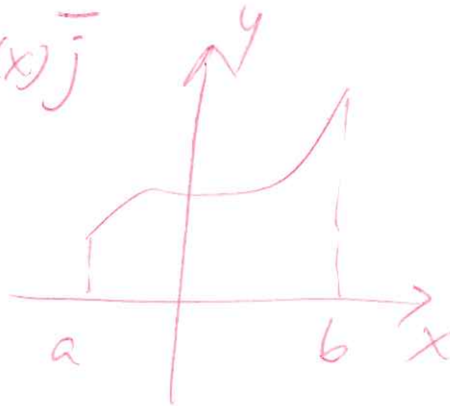
$$s=\int_a^b \left|\frac{d\bar r}{dt}\right| dt = \int_a^b \underbrace{|\bar v(t)|}_{v(t)}\, dt$$

Obs! Oberoende av parametriseringen faktiskt!

T.ex. en kurva $\bar r = x\bar i + f(x)\bar j$

så blir

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$



Polära koord. kurva $r=g(\theta)$, $\bar r = g(\theta)\cos\theta\,\bar i + g(\theta)\sin\theta\,\bar j$

$$ds=\sqrt{(g(\theta))^2+(g'(\theta))^2}\, d\theta$$

13

Obs! Om kurvan bara är styckvis glatt delar vi upp den i glatta bitar och beräknar längden var för sig och lägger ihop smålängderna!

13) Uppgift i LB.

$\bar{r} = t^2\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k}$, $0 \le t \le 1$.

Beräkna längden!

$$s = \int_0^1 |\bar{r}'(t)|\,dt = \int_0^1 |2t\bar{i} + 2t\bar{j} + 3t^2\bar{k}|\,dt =$$

$$= \int_0^1 |2\bar{i} + 2\bar{j} + 3t\bar{k}|\,t\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2^2 + 2^2 + 9t^2}\,t\,dt = [u = t^2] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{8 + 9u}\,du = \frac{1}{9 \cdot 3}\left[(8+9u)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{27}\left(17^{3/2} - 8^{3/2}\right)$$