1

26/3 F3

kl 13–15, E1

12.1 Funktioner av flera variabler

12.2 Gränsvärden & kontinuitet.

Rek. uppg. 12.1: 5, 9, 13, 15, 17, 23, 27, 33
12.2: 5, 7, 9, 11, 15

12.1 Funktioner av flera variabler

Volymen av en konservburk radie r, höjd h:

$$V = \pi r^2 h$$

Här beror V på två variabler r och h.

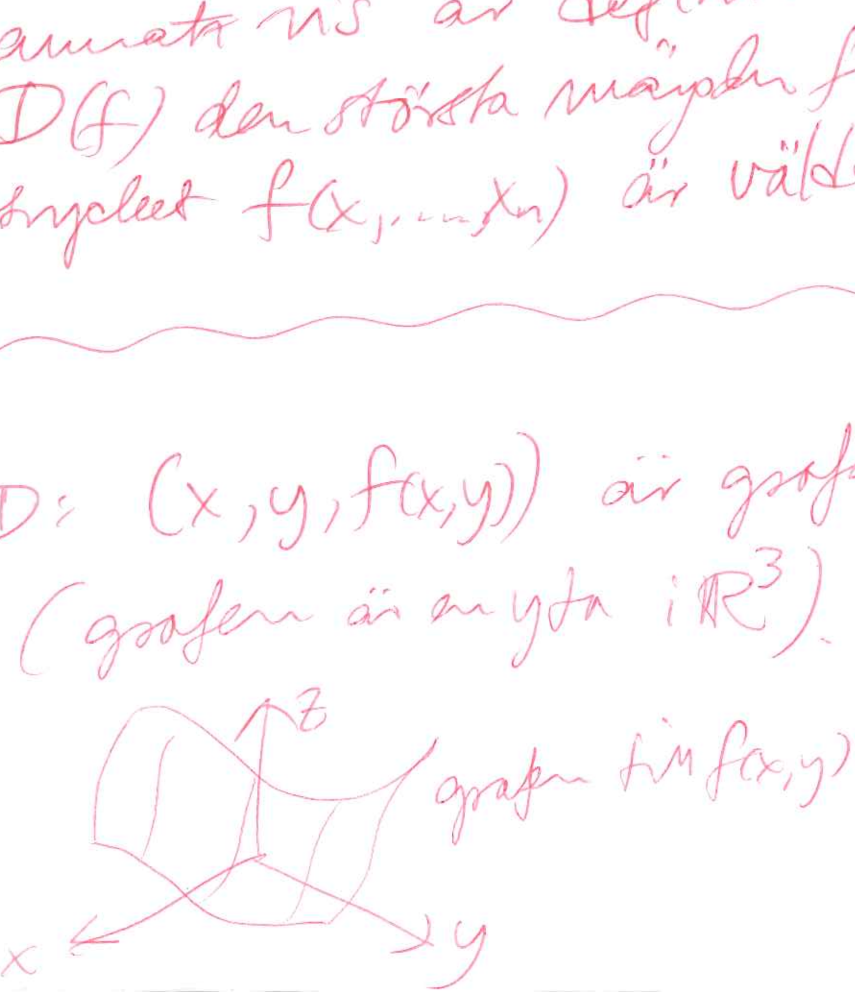
Därför kan vi skriva $V(r, h)$ för att betona detta. I det här fallet är naturliga villkor att $r \geq 0$ och $h \geq 0$.
(definitionsmängden är viktig precis som för funktioner av en variabel)

(2)

<u>DEF</u>. En funktion f av n st reella variabler är en regel som ger ett entydigt bestämt (reellt vanligtvis) tal $f(x_1,\dots,x_n)$ till varje punkt $(x_1,\dots,x_n)$ i någon delmängd $D(f)$ av $\mathbb{R}^n$ (<u>def-mängden</u> ! eller (domänen)). Mängden av reella tal $f(x_1,\dots,x_n)$ som uppkommer på detta vis kallas för <u>värdemängden</u>.

<u>Konvention</u>: Om vi inte specificerar på något annat vis är definitionsmängden $D(f)$ den största mängden för vilket uttrycket $f(x_1,\dots,x_n)$ är väldefinierat.

<u>Grafer</u> 2D: $(x,y,f(x,y))$ är grafen till f (grafen är en yta i $\mathbb{R}^3$).

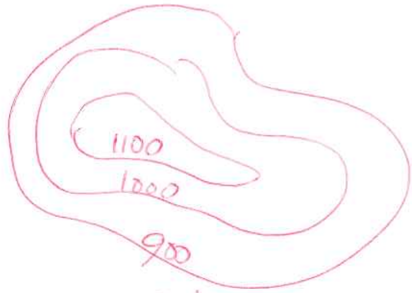


Ex. (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Det är svårt att rita i 3D.

T.ex. i kartböcker löser man problemet genom att ange höjdkurvor (med lika höjd över havet).



beskriver en bergstopp.

Kallas nivåkurvor.

Ex. (a) nivåkurvor till $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

(b) nivåkurvor till $f(x,y) = x^2 - y^2$.

OBS: Datorgrafik är mycket användbart!

12.2 Gränsvärden & kontinuitet.

$$\boxed{f(x,y) \longrightarrow L \quad \text{då} \quad (x,y) \to (a,b)}$$

Vad ska detta betyda?

Tja, vi kunde ju välja t.ex. $y=b$

och betrakta

$f(x,b) \longrightarrow L$ då $x \to a$

och omvänt p.s.s.

$f(a,y) \longrightarrow L$ då $y \to b$.

Men detta blir för speciellt och vi behöver verkligen tänka 2D här!

DEF $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

betyder att

(i) varje omgivning av (a,b) innehåller punkter ur $D(f)$ som inte är just (a,b),

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

5

Lite räkneregler (som vanligt!):

Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ & $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$,

så gäller ~~att~~

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)+g(x,y)\right) = L+M,$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)-g(x,y)\right) = L-M,$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)\,g(x,y)\right) = LM,$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad (\text{om } M \neq 0).$$

Dessutom, om F är kont. i $t=L$ (av en variabel) så:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F(L).$$

6

Ex (a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} x^2/y^3 = \frac{4}{27}$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$ saknas!

Ex $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$. Visa!

DEF Funktionen $f(x,y)$ är kont. i (a,b)

om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ måste alltså finnas!

Uppgift 9) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

11) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^4}$