F4

Må 30/3 13-15
sal D1

12.3 Partiella derivator.

12.4. Högre ordningens derivator

12.3: 5, 7, 13, 23.
12.4: 5, 7, 11, 15, 17.

12.3 Partiella derivator

DEF.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x'(x,y) = f_1'(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y'(x,y) = f_2'(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Om de finns, kallas dessa partiella derivator.

OBS! $f'_x(x,y)$ = derivatan av $f(x,y)$ map x när vi håller y konstant

$f'_y(x,y)$ = derivatan av $f(x,y)$ map y när vi håller x konstant.

Ex. Finn $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ om

$$z = x^3y^2 + x^4y + y^4.$$

Ex. Finn $f'_x(0,\pi)$ om $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$.

Ex. Visa att $z = f(x/y)$ löser

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Obs! Notationen funkar även om vi har tre variabler, t.ex. (x,y,z).

b)

Tangentplan & normallinjer

$z = f(x,y)$.

Antag att vi studerar en punkt (a,b), och söker approximera $f(x,y)$ med ett plan.

$$\bar{T}_1 = i + f'_x(a,b)\bar{k}$$
$$\bar{T}_2 = j + f'_y(a,b)\bar{k}$$

två tangentiala vektorer.

Då måste $\bar{T}_1 \times \bar{T}_2$ vara normal mot grafen i punkten (a,b)!

$$\bar{n} = \bar{T}_2 \times \bar{T}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f'_y(a,b) \\ 1 & 0 & f'_x(a,b) \end{vmatrix} =$$

$$= f'_x(a,b)\,\bar{i} + f'_y(a,b)\,\bar{j} - \bar{k}$$

blir alltså normal!

4

Ett plan vinkelrätt mot

$\bar{n} = (A, B, C) = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$

är på formen

$$Ax + By + Cz = D$$

och om det passerar genom punkten

(x_0, y_0, z_0) kan vi skriva ekvationen på

formen

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Om vi tillämpar detta på

$$\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \\ z_0 = f(a,b) \\ A = f'_x(a,b) \\ B = f'_y(a,b) \\ C = -1 \end{cases}$$

får vi:

$$f'_x(a,b)(x-a) + \cancel{B} f'_y(a,b)(y-b) = z - f(a,b)$$

som ekvation till $\boxed{\text{tangentplanet}}$.

Vi skriver om ekvationen som

$$z = f(a,b) + (x-a)f'_x(a,b) + (y-b)f'_y(a,b).$$

Ex. Bestäm normalvektor och tangentplanets ekvation för $z = \sin(xy)$ i $\begin{cases} x = \pi/3 \\ y = -1 \end{cases}$.

Ex. Bestäm kortaste avståndet från $(3,0,0)$ till hyperboliska paraboloiden $z = x^2 - y^2$.

12.4 Högre ordningens derivator

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ pss } f''_{yx}(x,y) = \ldots$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

pss t.ex.

(6)

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} =$$

$$= f'''''_{zyyxy}(x,y,z).$$

Ex. Beräkna $f'''_{yyz}(x,y,z)$, $f'''_{yzy}(x,y,z)$, $f'''_{zyy}(x,y,z)$ för funktionen $f(x,y,z) = e^{x-2y+3z}$.

SATS Antag att två blandade n:e-ordningens partialderivator innehåller samma deriveringar fast i olika ordning. Om de är båda kontinuerliga i en omgivning av den givna punkten, så är de lika i punkten.

Spec. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ om båda uttrycken är kontinuerliga.

7

Laplace ekvation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$ (i två variabler)

Vågekvationen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$ ($c > 0$ hastighet)

Ex. $z = e^{kx}\cos(ky)$, $z = e^{kx}\sin(ky)$ löser Laplace ekv.

Ex. $w = f(x-ct) + g(x+ct)$ löser vågekv.