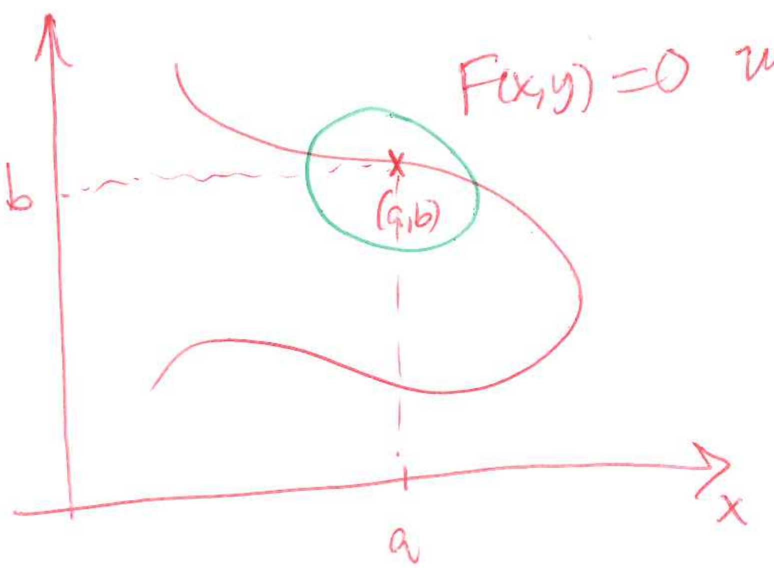
F7

15/4 kl 10-12 i D1

1

12.8. Implicita funktioner.

Rek uppg: 12.8: 13, 17.



$F(x,y)=0$ motsvarar en kurva i planet

($t.ex.\ x^2+y^2-1=0$ "cirkel")

FRÅGA: Får vi ut en funktion $y=y(x)$ genom att lösa ekv. $F(x,y)=0$?

Är denna väldef för $\boxed{a-h<x<a+h}$ för ngt $h>0$?

Vi vill förstås att $y(a)=b$.

②

Om funktionen $y(x)$ finns, så gäller förstås att

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \text{om} \quad \underbrace{a-h < x < a+h}_{x \in I =]a-h, a+h[}.$$

Ex. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

ekv. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ger att $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

(de två funktionsgrenarna av enhetscirkeln).

Om nu t.ex. $(a, b) = (0, -1)$ [ligger på cirkeln!]

Så får vi $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$ som den implicit definierade funktionen genom punkten $(0, -1)$ på grafen. $I =]-1, 1[$ går bra!

ÅGA: Antag nu att $F(x,y)=0$ definierar en funktion $y=y(x)$ med $y(a)=b$ som är väldef. för $x\in I=]a-h,a+h[$.

Trots att vi inte kan skriva upp ett slutet uttryck för $y(x)$, så kanske vi kan räkna ut $y'(x)$ på något vis?

Vi utgår från att

$$F(x,y(x))=0 \text{ på } x\in I.$$

Om $y'(x)$ finns och $F(x,y)$ är C^1-glatt av två variabler, ger kedjeregeln att

$$0=\frac{d}{dx}F(x,y(x))=F_x'(x,y(x))+F_y'(x,y(x))\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=y'(x)}$$

så att

$$\boxed{y'(x)=-\frac{F_x'(x,y(x))}{F_y'(x,y(x))}}$$

OBS! $y'(x)$ uttrycks alltså inte heller explicit, utan i termer av F's partiella derivator i punkterna $(x, y(x))$.

~~Ex. $x^2+y^2+z^2=1$, $z=z(x,y)$~~

Fler dimensioner

$$F(x,y,z)=0$$

Lös ut $z=z(x,y)$!

Därefter, beräkna $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$!

Gör p.s.s. som ovan!

Ex. $x^2+y^2+z^2=1$, $z=z(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=? \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

System av ekvationer

$$\begin{cases} F(x,y,z,w)=0 \\ G(x,y,z,w)=0 \end{cases}$$ två ekv.!

Kan förväntas ha lösn.

$$\begin{cases} x = x(z,w) \\ y = y(z,w) \end{cases}$$ eller t.ex. $$\begin{cases} z = z(x,y) \\ w = w(x,y) \end{cases}$$

dvs vi kan ~~reducera~~ antalet oberoende variabler!

Kan jobba på likartat vis!

$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$ betyder $\begin{cases} x = x(z,w) \\ y = y(z,w) \end{cases}$ ~~[illegible]~~

dvs w hålls konstant!

Ex. $u = x^2 + xy - y^2$
$v = 2xy + y^2$

(a) $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v = ?$

b $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y = ?$

i $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

6

DEF: Jacobianen av

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad \text{(variabelbyte)}$$

är determinanten

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Pss. 3D:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Obs! $$\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}}$$

implicita funktionssatsen

7

(2D)

$F(x,y)=0$ $(x,y)=(a,b)$ uppfyller detta.

Om F är C^1 och

$F'_y(a,b)\neq 0$ så finns en lokal entydig lösn.

$$\begin{cases} y=y(x) \\ y(a)=b \end{cases}$$ som är C^1 $x \in I =]a-h, a+h[$

med

$F(x, y(x))=0.$