F8 | 16/4 kl 10-12 i D1 | 1

12.9. Taylors formel, Taylorserier och approximationer.

13.1. Extremvärden.

Rek. uppg. 12.9: 1, 3, 5, 7, 11.
13.1: 5, 7, 9, 19, 23, 25

TAYLORS FORMEL I 1 DIM.

$x \approx 0$

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \dots + \frac{x^m}{m!}F^{(m)}(0) + R_m(x) \qquad (*)$$

där $R_m(x)$ är resttermen. Resttermen är liten för x nära 0, om funktionen F är $\underbrace{C^{m+1}\text{-glatt}}_{f, f', \dots, f^{(m+1)} \text{ alla kontinuerliga}}$. $R_m(x) = \frac{F^{(m+1)}(\theta x)}{(m+1)!}x^{m+1}$ för ngt $\theta: 0 < \theta < 1$.

TAYLORS FORMEL I 2DIM.

$f(x,y) = ?$ nära $(0,0)$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + x f'_x(0,0) + y f'_y(0,0) \\ &+ \frac{x^2}{2!} f''_{xx}(0,0) + \frac{xy}{1!\,1!} f''_{xy}(0,0) + \frac{y^2}{2!} f''_{yy}(0,0) \\ &+ \ldots + \frac{x^m}{m!} f^{(m)}_{x\ldots x}(0,0) + \frac{x^{m-1}y}{(m-1)!\,1!} f^{(m)}_{x\ldots xy}(0,0) + \\ &\ldots + \frac{y^m}{m!} f^{(m)}_{y\ldots y}(0,0) + R_m(x,y) \end{aligned}}$$

Här är resttermen

$$R_m(x,y) = O\left((x^2+y^2)^{\frac{m+1}{2}}\right)$$

(mindre exakt bestämd).

③

För att förstå Taylors formel i 2dim bättre, är det bra att se varifrån den kommer!

Obs! $(0,0)$ kan bytas mot en allmän punkt (a,b), och (x,y) byts då mot $(a+h, b+k)$.

Finns det något sätt att använda 1Dim teknik nu i 2Dim?

Vi bildar

$$F(t) = f(a+th, b+tk)$$

som är en funktion av 1 variabel!
Så på F kan vi använda Taylors formel!

Vi använder $(*)$ med $x=1$:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + R_n(1).$$

$$R_n(1) = \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \quad 0<\theta<1$$

④

Men nu behöver vi uttryck för

t.ex. $F(0)$, $F'(0)$, ...

$F(0) = f(a,b)$ förstås, och

$F(1) = f(a+h, b+k)$.

$$F'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kedjeregel}}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)\overbrace{\frac{d(a+th)}{dt}}^{h} + \frac{\partial f}{\partial y}(\ldots)\overbrace{\frac{d(b+tk)}{dt}}^{k}$$

$$= h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk)$$

$$= (h,k)\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\bar{\nabla} f}\Bigg|_{(x,y)=(a+th,\, b+tk)}$$

$$= \left((h,k)\cdot\bar{\nabla} f\right)\Big|_{(x,y)=(a+th,\, b+tk)}$$

$$= \Big(\underbrace{(h,k)\cdot\bar{\nabla}}_{h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}}\Big) f\,\Big|_{(x,y)=(a+th,\, b+tk)}$$

PSS

$$F''(t) = ((h,k)\cdot\bar{\nabla})^2 f\Big|_{(x,y)=(a+th,\,b+tk)}$$

$\vdots$

$$F^{(m)}(t) = ((h,k)\cdot\bar{\nabla})^m f\Big|_{(x,y)=(a+h,\,b+k)}$$

Vad menas egentligen med t.ex.

$$((h,k)\cdot\bar{\nabla})^2 = ?$$

$$((h,k)\cdot\bar{\nabla})^2 = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= h\frac{\partial}{\partial x}h\frac{\partial}{\partial x} + h\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial y}h\frac{\partial}{\partial x} +$$

$$+ k\frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial}{\partial y} =$$ [h & k är konstanter!]

$$= h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Stoppar vi in $t=0$ får vi alltså

$$F(0) = f(a,b)$$

$$F'(0) = \left((h,k)\cdot\bar{\nabla}\right) f\Big|_{(x,y)=(a,b)}$$

$$F''(0) = \left((h,k)\cdot\bar{\nabla}\right)^2 f\Big|_{(x,y)=(a,b)}$$

$$\vdots$$

$$F^{(m)}(0) = \left((h,k)\cdot\bar{\nabla}\right)^m f\Big|_{(x,y)=(a,b)}$$

och stoppar vi in $t=\theta$ får vi att

$$F^{(m+1)}(\theta) = \left((h,k)\cdot\bar{\nabla}\right)^{m+1} f\Big|_{(x,y)=(a+\theta h,\, b+\theta k)}$$

(här är $0<\theta<1$)

Slutligen så blir alltså formeln

$$f(a+h,b+k) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \dots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(0) + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} =$$

$$= f(a,b) + \left((h,k)\cdot\bar{\nabla}\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left((h,k)\cdot\bar{\nabla}\right)^2 f(a,b) + \dots + \frac{1}{m!}\left((h,k)\cdot\bar{\nabla}\right)^m f(a,b)$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!}\left((h,k)\cdot\bar{\nabla}\right)^{m+1} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

förnågot θ med $0<\theta<1$.

Ex. Finn bästa andragradspolynomet som approximerar $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$ runt $(1,2)$, och använd detta polynom för att approximera $\sqrt{(1{,}02)^2+(1{,}97)^3}$.

Obs! Kan göras på minst två olika sätt!

Ex. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 runt (0,0) för $f(x,y)=e^{x-2y}$.

APPROXIMATION AV IMPLICITA FUNKTIONER

Ex. Ekvationen $\sin(x+y)=xy+2x$ har en lokal lösn. $y=f(x)$ med $\cancel{f}(0)=0$.

Finn funktionens Taylorpolynom upp till grad 4 i potenser av x.

EXTREMVÄRDEN.

Extremvärde = max eller min

$\begin{cases} \text{globala extremvärden} \\ \text{lokala extremvärden} \end{cases}$

SATS. En funktion $f(x,y)$ kan ha ett lokalt eller ~~globalt~~ extremvärde *(något av)* i en punkt (a,b) bara om *något av* följande gäller:

(a) (a,b) är en kritisk punkt, dvs $\bar{\nabla} f(a,b) = \bar{0}$,

eller (b) (a,b) är en singulär punkt, dvs $\bar{\nabla} f(a,b)$ finns inte,

eller (c) (a,b) är en randpunkt för D_f.

SATS. Antag att $f(x,y)$ är kont på ett kompakt område (dvs begränsat & slutet). I så fall antar f sitt max och min.

Andraderivatatestet

SATS Antag (a,b) är en inre punkt av D_f.
Antag f är C^2-glatt nära (a,b), så att
Hessianen

$$\overline{\overline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

kritiskpunkt-villkor.

är kont där. Om nu $\boxed{\nabla f(a,b) = \overline{0}}$,
~~(a)~~ och ~~obs~~

(a) om $\overline{\overline{H}}(a,b)$ är pos. def., så har f ett lok min i (a,b).

(b) om $\overline{\overline{H}}(a,b)$ är neg def., så f har ett lok. max i (a,b).

(c) om $\overline{\overline{H}}(a,b)$ är indef., så har f en sadelpunkt i (a,b).

(d) om $\overline{\overline{H}}(a,b)$ varken är posdef, negdef, eller indef., så ger testet ingen information!

OBS! Motsv. i 3D också förstås!

Ex. Finn & klassifiera de kritiska punkterna till

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x.$$

Ex. Finn & klassifiera de krit. punkterna till $f(x,y) = xy\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Har f ett abs. max eller min? Varför?