F9

1

17/4 kl 10–12 i D1

13.2. Extremvärden av funktioner ~~av flera~~ med bivillkor.

13.3. Lagrange-multiplikatorer.

13.4. Lagrange-multiplikatorer i $\mathbb{R}^n$.

Rek. uppg. 13.2: 3, 5, 9, 15

13.3: 3, 9, 11, 15

13.4: 1, 3.

②

EXTREMVÄRDEN PÅ AVGRÄNSADE OMRÅDEN.

Ex. Finn max & min av $f(x,y) = 2xy$ på

$x^2+y^2 \leq 4$.

Ex. Finn extremvärdena till $f(x,y) = x^2 y e^{-x-y}$

på T : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 4. \end{cases}$

LAGRANGE-MULTIPLIKATORER

Optimering med bivillkor (likhetsvillkor)

max/min $f(x,y)$

givet att $g(x,y) = C$.

SATS. Antag f & g är C^1-glatta, och

låt $\mathcal{C}$: $g(x,y)=0$ vara en kurva.

Antag att vi har ett lokalt max/min av f

på $\mathcal{C}$ i punkten $P_0 = (x_0,y_0)$. Antag nu att

(a) P_0 inte ändpunkt till $\mathcal{C}$

(b) $\overline{\nabla} g(P_0) \neq \overline{0}$.

Då finns det ett tal λ_0 så att

(x_0, y_0, λ_0) är kritisk punkt till

Lagrangefunktionen

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$

OBS! Motsvarar att

$$\nabla f \parallel \nabla f \quad \text{i } (x_0, y_0).$$

Anm. Kritiska punkt-villkoren för L

är:

$\nabla f \parallel \nabla g$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{matrix}\right\} \text{ i } (x_0, y_0, \lambda_0)$$

$g(x_0, y_0) = 0$

Ex. Finn kortaste avståndet mellan origo och kurvan $x^2 y = 16$.

Ex. $\min\ y$

givet $y^3 - x^2 = 0$.

Analysera vad som går fel! ($\bar{\nabla} g = \bar{0}$ i punkten!)

Ex. $\max_{\min}\ x y^2 z^3$ givet att $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

TVÅ BIVILLKOR

$$\max_{\min}\ f(x,y,z)$$

$$\text{givet } \begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Vi bildar analogt

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

och letar efter kritiska punkter!

Ex. $\max_{\min}$ $xy+2z$

givet att $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=24 \end{cases}$.