Mängder i planet

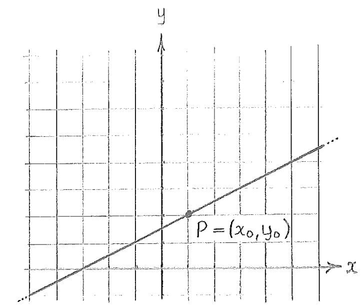
Linjer och halvplan

En linje som går genom punkten $P=(x_0,y_0)$ och har normalen $\bar{n}=(a,b)$ ges av ekvationen

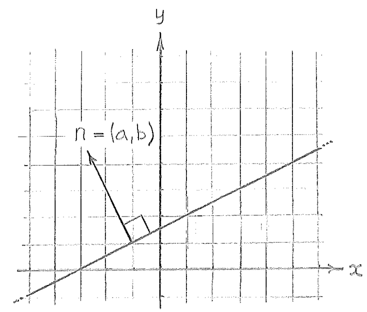
$$(a,b)\cdot\big((x,y)-(x_0,y_0)\big)=0,$$

dvs.

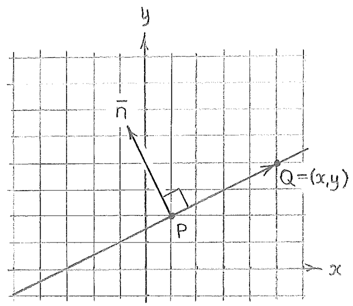
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$



① Antag att vi har en linje som innehåller punkten $P=(x_0,y_0)$

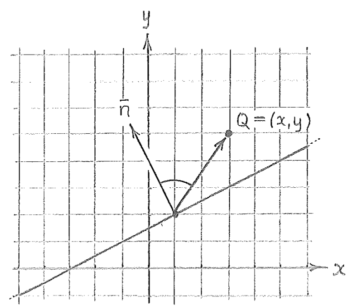


② och att linjen är vinkelrät mot normalvektorn $\bar{n}=(a,b)$.



③ En punkt $Q=(x,y)$ ligger på linjen om $\bar{v}=\overrightarrow{PQ}$ $=(x,y)-(x_0,y_0)$ är vinkelrät mot $\bar{n}=(a,b)$, dvs

$$(a,b)\cdot\big((x,y)-(x_0,y_0)\big)=0.$$

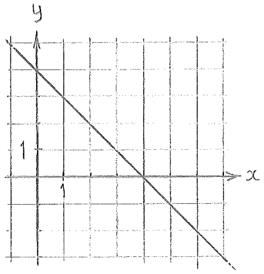


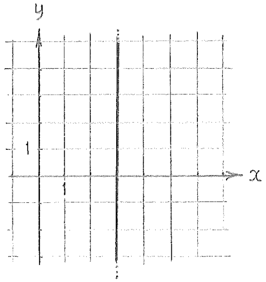
④ Om $\bar{v}=\overrightarrow{PQ}$ inte är vinkelrät mot $\bar{n}$, dvs

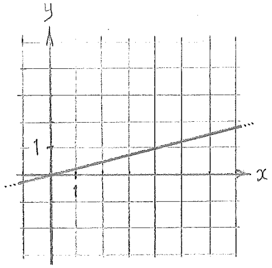
$$(a,b)\cdot\big((x,y)-(x_0,y_0)\big)\neq 0,$$

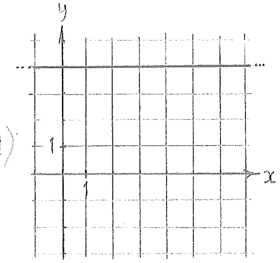
då ligger inte Q på linjen.

Övning 1: Ange ekvationen för respektive linje.

a) 

b) 

c) 

d) 

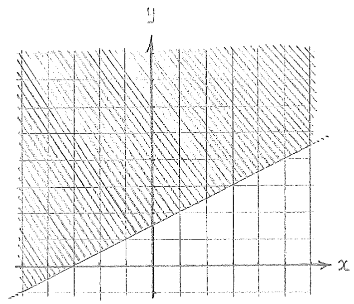
Området på ena sidan av en linje kallas för ett halvplan.

Det halvplan som är på den sida om linjen

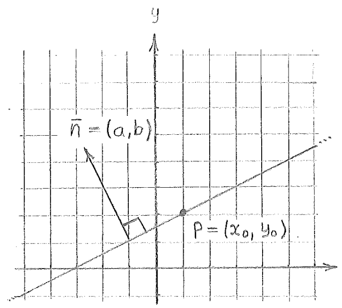
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

ditåt normalen $\bar{n} = (a,b)$ pekar ges av

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) \geqslant 0.$$



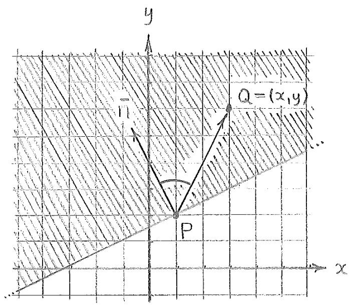
① Antag att vi har ett halvplan.



② Kantlinjen till halvplanet är

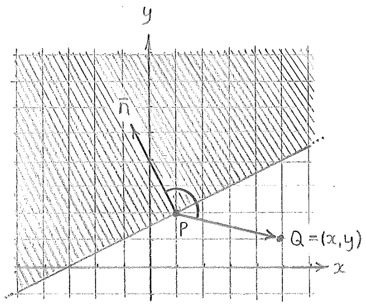
$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$

där $\bar{n} = (a,b)$ pekar in i halvplanet.



③ En punkt $Q = (x,y)$ ligger i halvplanet om $\bar{v} = \overrightarrow{PQ} = (x,y) - (x_0, y_0)$ bildar en spetsig vinkel mot $\bar{n} = (a,b)$, dvs

$(a,b) \cdot ((x,y) - (x_0, y_0)) \geqslant 0.$

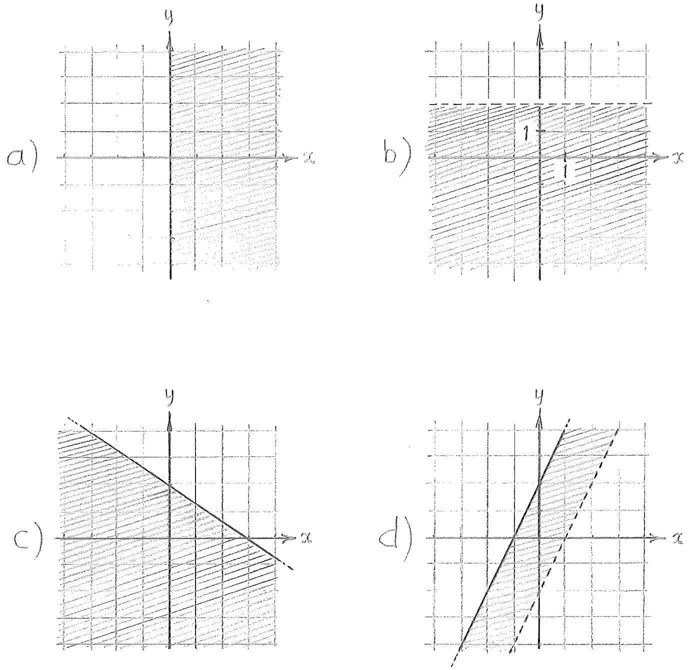


④ Om $\bar{v} = \overrightarrow{PQ}$ bildar en trubbig vinkel mot $\bar{n}$, dvs

$(a,b) \cdot ((x,y) - (x_0, y_0)) < 0,$

då ligger inte Q i halvplanet.

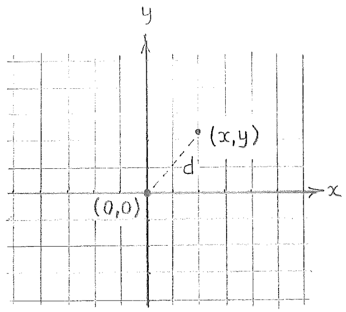
Övning 2: Ange en olikhet som ger respektive område.



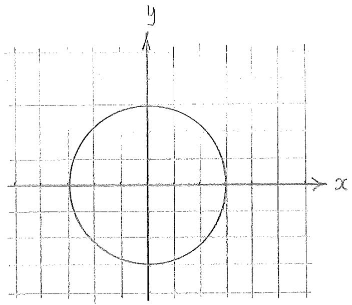
Cirkelområden

En cirkel med medelpunkt i origo och radie r har ekvationen

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

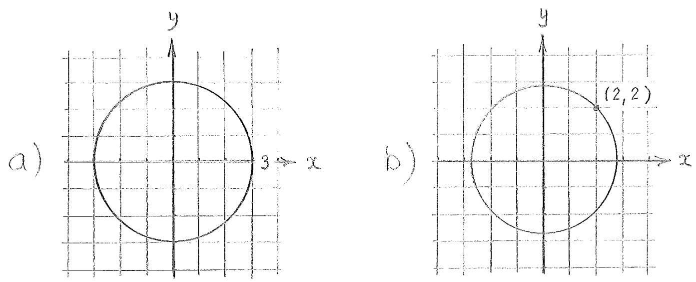


(1) Avståndet d mellan (x,y) och origo ges av avståndsformeln
$$d^2 = x^2 + y^2.$$



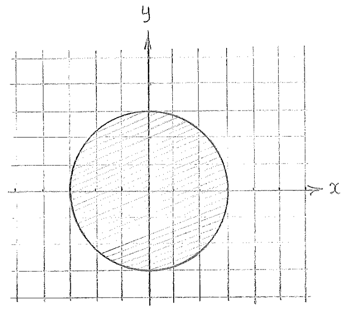
(2) Cirkeln består av alla punkter (x,y) med avståndet r till origo:
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

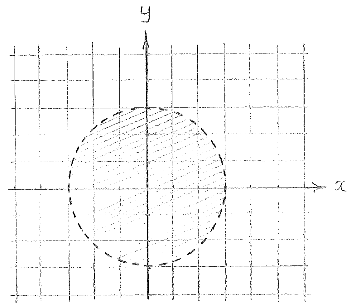
Övning 3: Ange ekvationen för respektive cirkel.



En cirkelskiva med medelpunkt i origo och radie r har ekvationen

$$x^2 + y^2 \leq r^2.$$

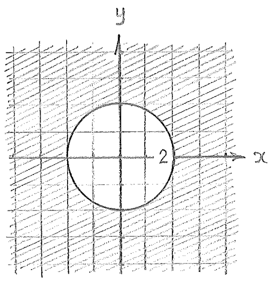




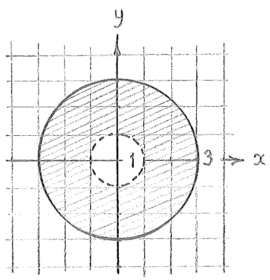
① Cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 9$ består av alla punkter med avstånd mindre än eller lika med $\sqrt{9} = 3$ till origo.

② Ekvationen $x^2+y^2 < 9$ är samma cirkelskiva men där randcirkeln $x^2+y^2=9$ inte ingår (streckad).

Övning 4: Ange en ekvation för nedanstående områden.

a) 

Området utanför en cirkel med radie 2 och medelpunkt i origo.

b) 

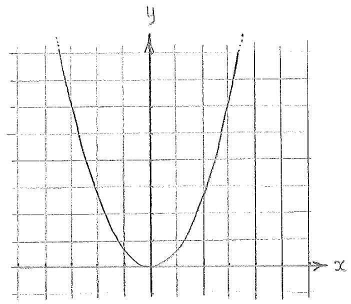
Området mellan två origocentrerade cirklar med radie 1 resp. 3.

Parabelområden

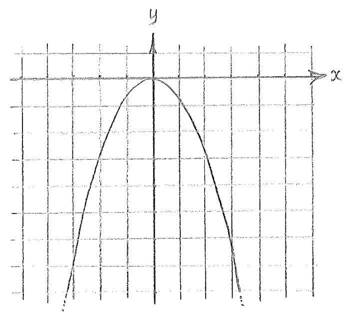
En parabel med vertex (spets) i origo och med y-axeln som symmetriaxel har ekvationen

$$y = \pm kx^2$$

där k är en positiv konstant och tecknet ± anger hur parabeln är vänd.

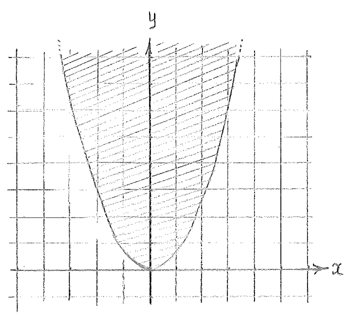


Parabeln $y = +kx^2$

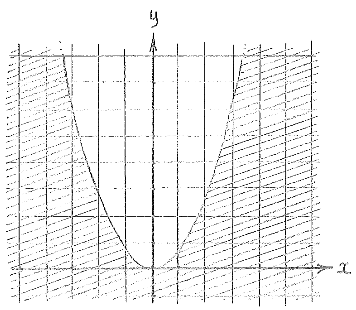


Parabeln $y = -kx^2$

Om likheten ersätts med en olikhet fås området ovan eller under parabeln.



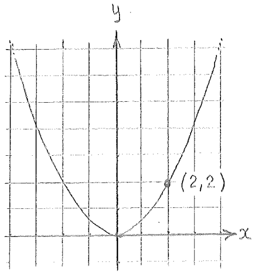
Området $y \geq +kx^2$



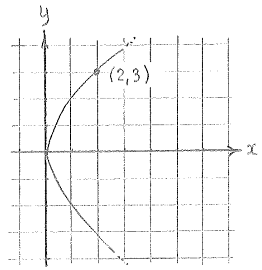
Området $y \leq +kx^2$

Övning 5: Ange ekvationen för respektive parabel.

a)

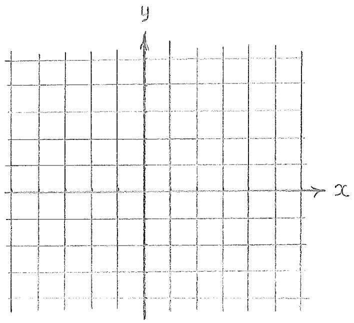


b)



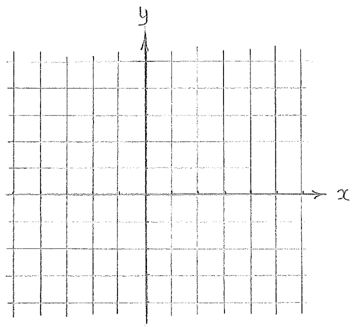
Övning 6: Skissera parabelområdena.

a)



Området $2y \leq -x^2$

b)

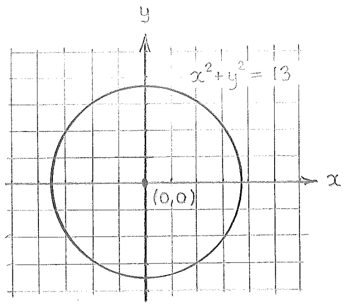


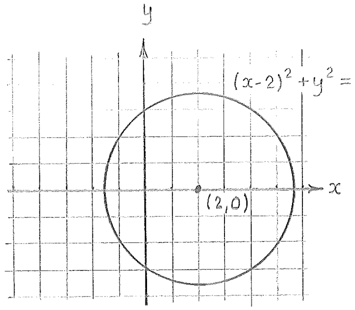
Området $x < y^2$

Några transformationer

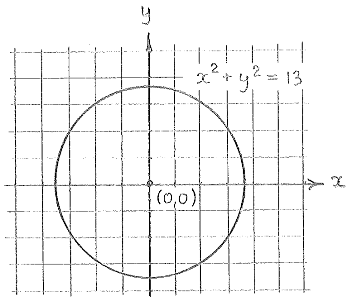
Translation

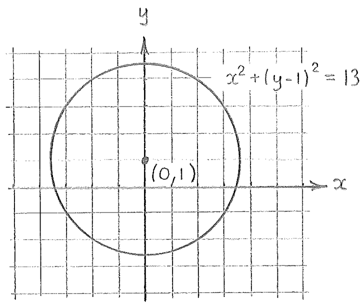
Ersätts (x, y) med $(x-a, y-b)$ i en kurvas ekvation förskjuts kurvan med a enheter åt höger och b enheter uppåt.





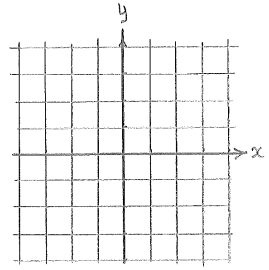
En punkt på cirkeln $(x-2)^2+y^2=13$ behöver ha x-koordinaten två enheter större än motsvarande punkt på cirkeln $x^2+y^2=13$.



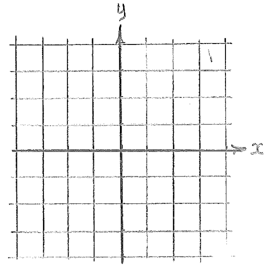


En punkt på cirkeln $x^2+(y-1)^2=13$ behöver ha y-koordinaten en enhet större än motsvarande punkt på cirkeln $x^2+y^2=13$.

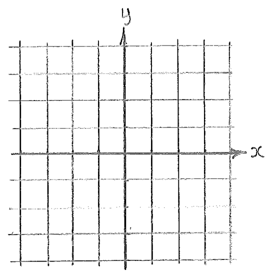
Övning 7: Skissera kurvorna/områdena.

a) 

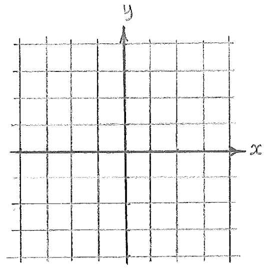
$(x-1)^2+(y-1)^2=9$

b) 

$-\frac{1}{2}(x+1)^2+y=2$

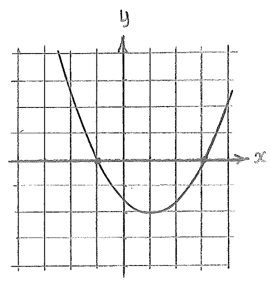
c) 

$y+2 \leq 2(x-1)$

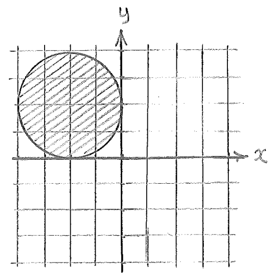
d) 

$x^2+(y-1)^2 \geq 4$

Övning 8: Ange kurvornas ekvationer.

a) 

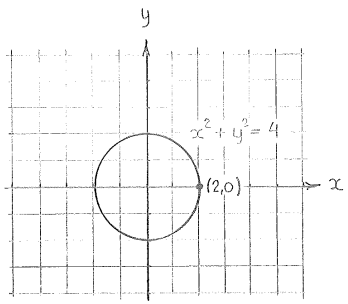
En parabel

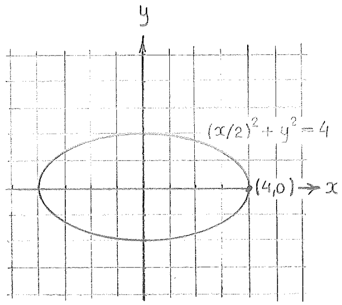
b) 

En cirkelskiva

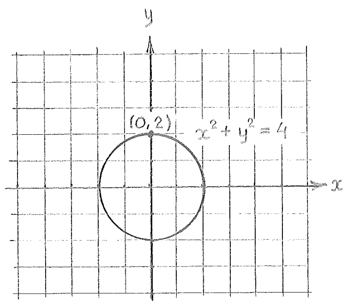
Omskalning

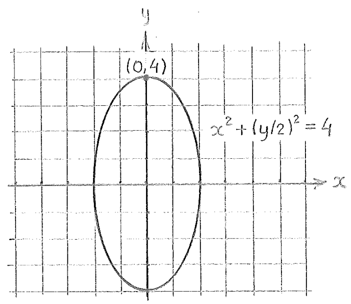
Ersätts (x, y) med $(x/a, y/b)$ i en kurvas ekvation skalas kurvan om med faktorn a i x-led och faktorn b i y-led.





En punkt på kurvan $(x/2)^2+y^2=4$ behöver ha x-koordinaten dubbelt så stor som motsvarande punkt på cirkeln $x^2+y^2=4$.





En punkt på kurvan $x^2+(y/2)^2=4$ behöver ha y-koordinaten dubbelt så stor som motsvarande punkt på cirkeln $x^2+y^2=4$.

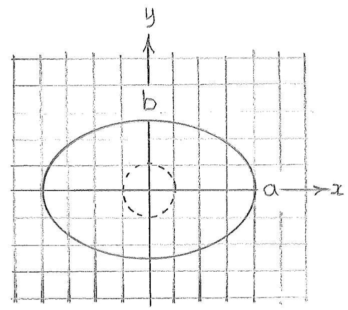
Ellipsområden

En cirkel som skalas om med en faktor blir en ellips.

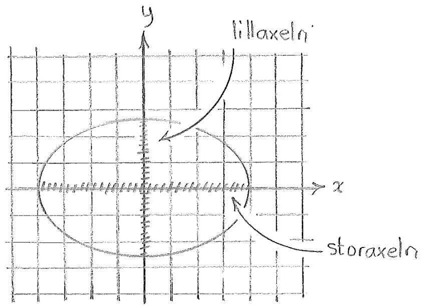
En ellips med medelpunkt i origo och med x- och y-axeln som symmetriaxlar har ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

där de positiva konstanterna a och b anger var ellipsen skär x- respektive y-axeln.

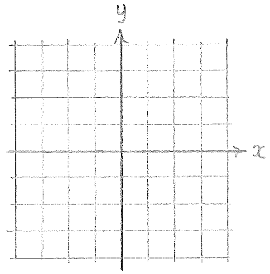


Ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ är en omskalning av enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ med faktorn a i x-led och faktorn b i y-led

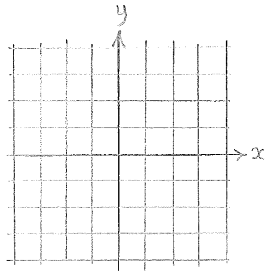


Ellipsens symmetriaxlar kallas för lill- och storaxlar.

Övning 9: Skissera ellipserna.

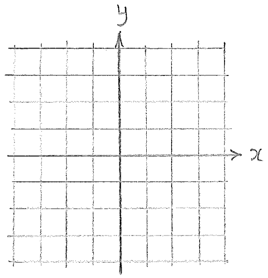
a) 

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

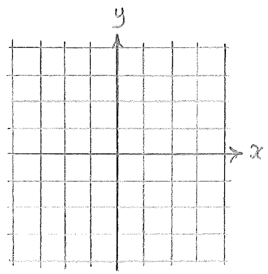
b) 

$\frac{1}{3}x^2 + 3y^2 = 3$

Övning 10: Skissera områdena.

c) 

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

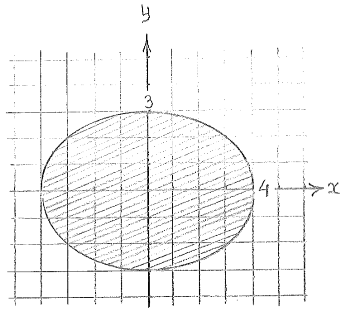
d) 

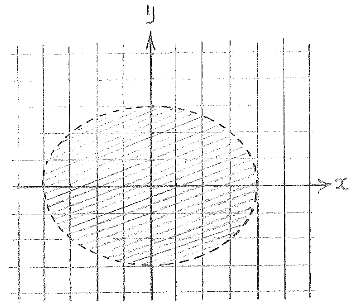
$$\frac{4+2xy}{x+y} = x+y$$

Ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

beskriver en ellipsskiva med ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ som randkurva.

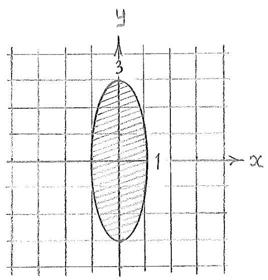


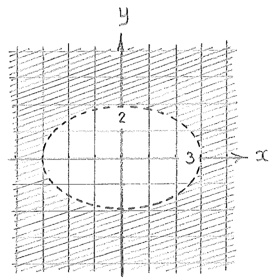


(1) Ellipsskivan $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ består av alla punkter på och innanför ellipsen $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(2) Ellipsskivan $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} < 1$ är samma ellipsskiva men där ellipsen $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ inte ingår (streckad).

Övning 11: Ange en ekvation för nedanstående områden.

a) 

b) 

Mängder i rummet

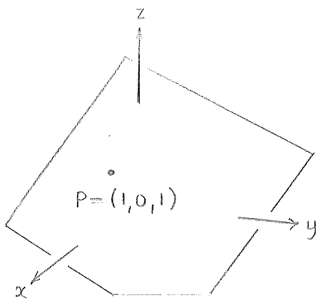
Plan och halvrum

Ett plan som innehåller punkten $P=(x_0,y_0,z_0)$ och har normalen $n=(a,b,c)$ ges av ekvationen

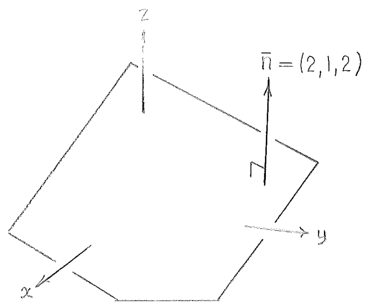
$$(a,b,c)\cdot\big((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\big)=0,$$

dvs.

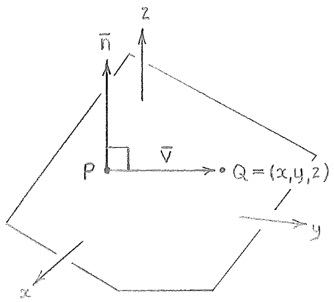
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$



① Vi har ett plan som innehåller punkten $P=(1,0,1)$,

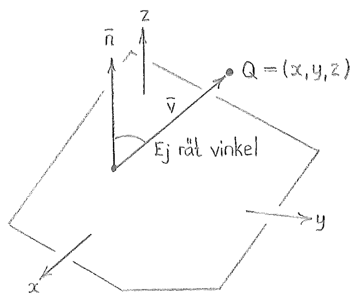


② och är vinkelrät mot normalvektorn $\bar{n}=(2,1,2)$.



③ En punkt $Q=(x,y,z)$ ligger i planet om $\bar{v}=\overrightarrow{PQ}=(x,y,z)-(1,0,1)$ är vinkelrät mot $\bar{n}=(2,1,2)$, dvs.

$(2,1,2)\cdot\big((x,y,z)-(1,0,1)\big)=0.$

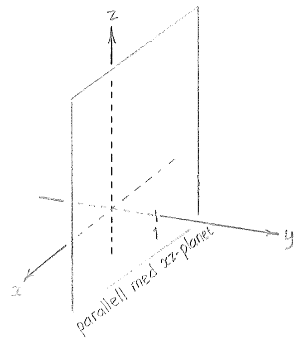


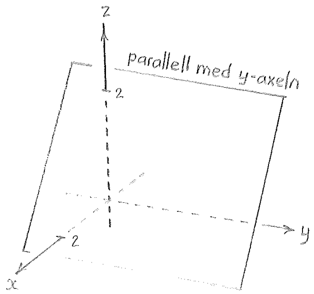
④ Om $\bar{v}=\overrightarrow{PQ}$ inte är vinkelrät mot $\bar{n}$, dvs

$(2,1,2)\cdot\big((x,y,z)-(1,0,1)\big)\neq 0$

då ligger Q utanför planet.

Övning 12: Bestäm planets ekvation.





Övning 13: Givet ett plan med ekvationen

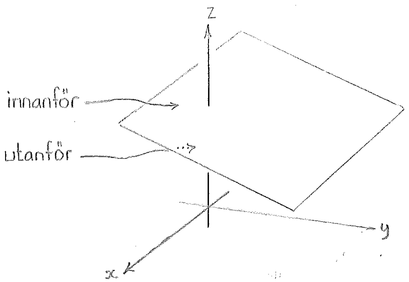
$$2x-y+3z=4.$$

a) Ligger punkten $(2,3,1)$ på planet?

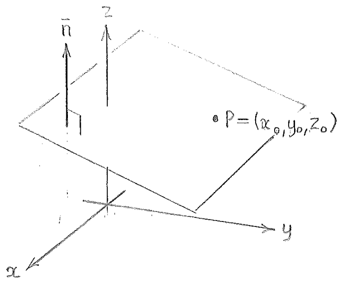
b) Avläs en normalvektor till planet.

Området på ena sidan av ett plan kallas för ett halvrum.

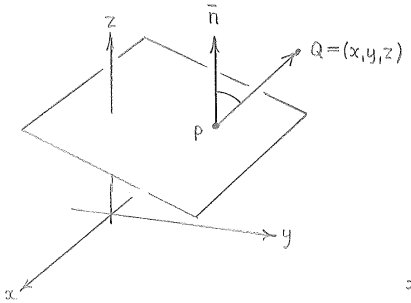
Det halvrum som är på den sida om planet
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
ditåt normalen $\bar{n}=(a,b,c)$ pekar ges av
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)\geq 0.$$



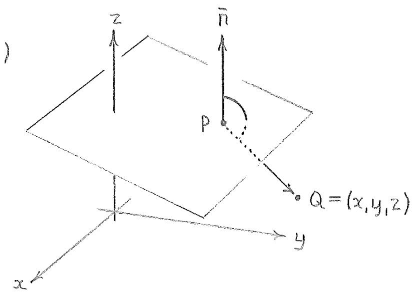
① Vi har halvrummet ovanför det utritade planet.



② Begränsningsplanet är
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$
där $\bar{n}=(a,b,c)$ pekar in i halvrummet.



③ En punkt $Q=(x,y,z)$ ligger i halvrummet om $\bar{v}=\overrightarrow{PQ}=(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)$ bildar en spetsig vinkel mot $\bar{n}=(a,b,c)$, dvs
$$(a,b,c)\cdot((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))\geq 0.$$



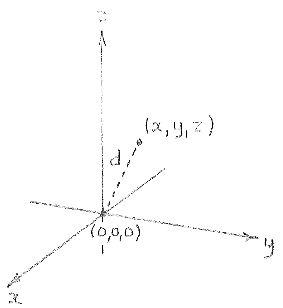
④ Om $\bar{v}=\overrightarrow{PQ}$ bildar en trubbig vinkel mot $\bar{n}$, dvs
$$(a,b,c)\cdot((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))<0,$$
då ligger inte Q i halvrummet.

Exempel 1: Skissera området $\{(x,y,z) : x+y+z\leq 1,\ x-y\geq 0,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$.

Sfäriska områden och ellipsoidområden

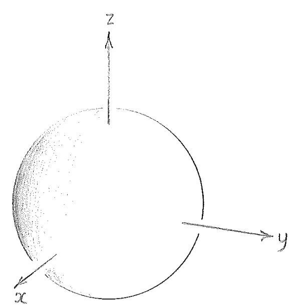
En sfär med medelpunkt i origo och radie r har ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$



① Avståndet d mellan (x, y, z) och origo ges av avståndsformeln

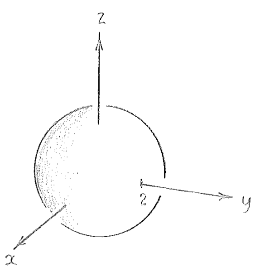
$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

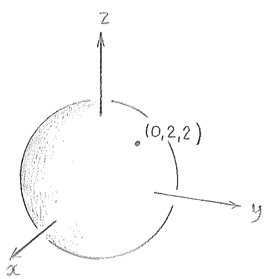


② Sfären består av alla punkter (x, y, z) med avstånd r till origo och ges därför av

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Övning 14: Ange ekvationen för respektive sfär.

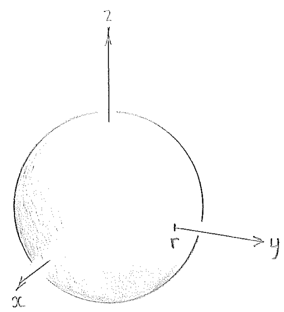




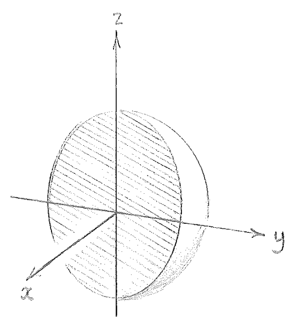
Området på och innanför en sfär kallas för ett klot.

Ett klot med medelpunkt i origo och radie r har ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2.$$



① Ett klot med medelpunkt i origo och radie r.



② Klotet i genomskärning. Innanmätet är en del av klotet.

Övning 15: Beskriv i ord följande områden

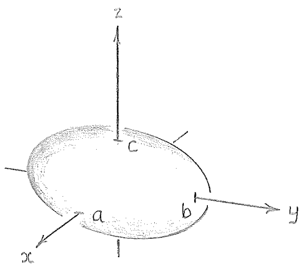
a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$

b) $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

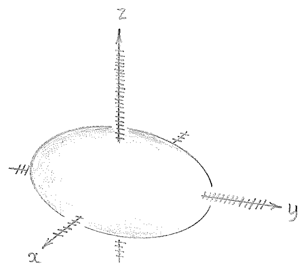
En ellipsoid med medelpunkt i origo och med x-, y- och z-axeln som symmetriaxlar har ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

där de positiva konstanterna a, b och c anger var ellipsoiden skär x-, y- respektive z-axeln.

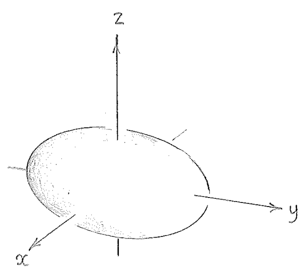


Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

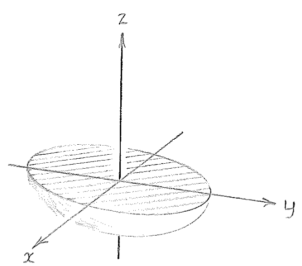


x-, y- och z-axlarna kallas för ellipsoidens huvudaxlar.

Området på och innanför en ellipsoid kallas för ett ellipsoidklot.



Ellipsoidklotet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

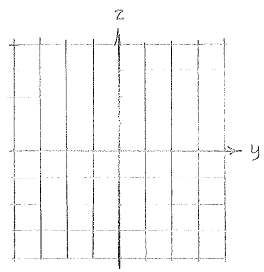


Ellipsoidklotet i genomskärning. Innanmätet tillhör klotet.

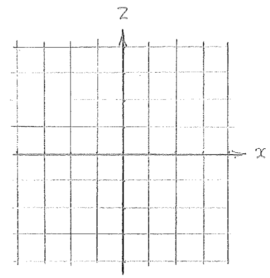
Övning 16: Rita ut skärningen mellan ellipsoiden

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

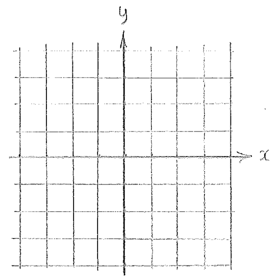
och planen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$. Skissera därefter ellipsoiden.



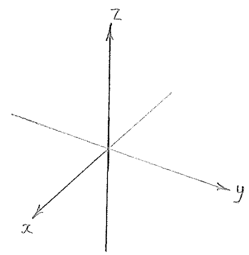
Planet $x=0$



Planet $y=0$



Planet $z=0$

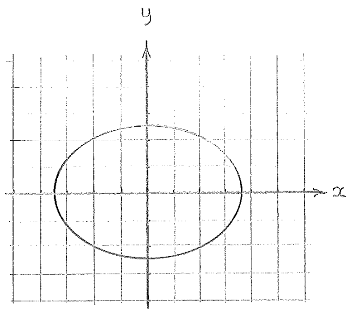


Cylinder

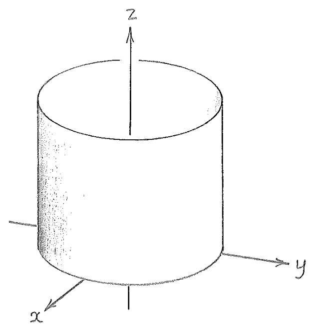
En elliptisk cylinder med z-axeln som axel har ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där a och b är positiva konstanter.

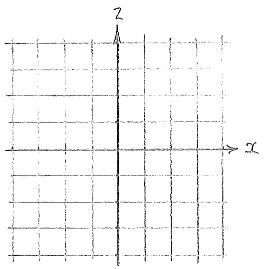


① Cylinderns skärning med plan z=konstant är ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

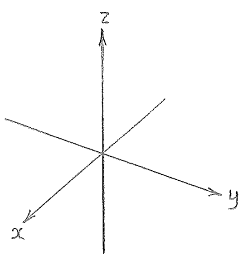


② Ytan är därför en cylinder med fixt elliptiskt tvärsnitt vinkelrätt mot z-axeln.

Övning 17: Rita ut skärningen mellan cylindern $x^2 + z^2 = 4$ och xz-planet. Skissera därefter cylindern.



xz-planet

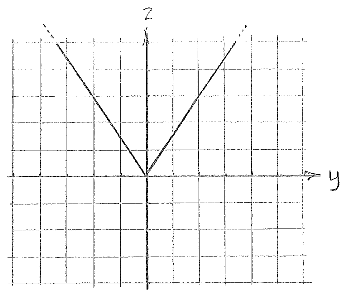


Kon

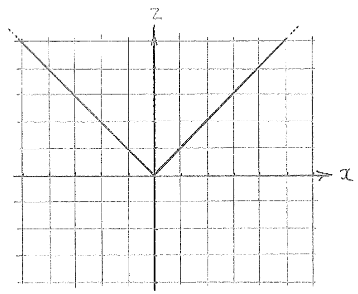
En elliptisk kon med vertex (spets) i origo, z-axeln som symmetriaxel och x- och y-axlarna som huvudaxlar har ekvationen

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}},$$

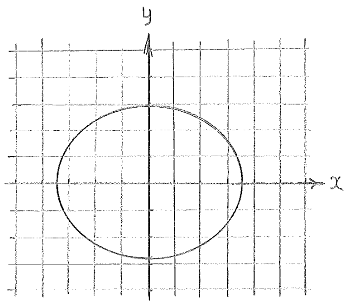
där a, b och c är positiva konstanter.



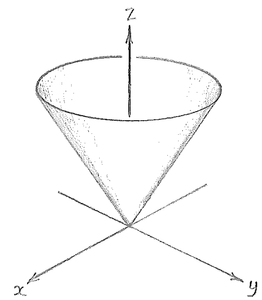
① Konens skärning med planet $x = 0$ ges av $z = c\sqrt{\frac{y^2}{b^2}} = \frac{c}{b}|y|$.



② Konens skärning med planet $y = 0$ ges av $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}} = \frac{c}{b}|x|$.



③ Konens skärning med planet $z = c$ är en ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



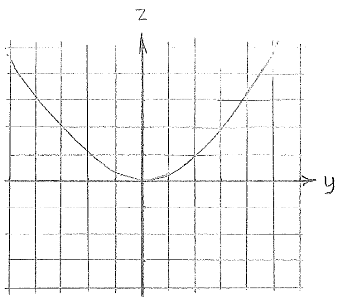
④ Konen $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$.

Paraboloid

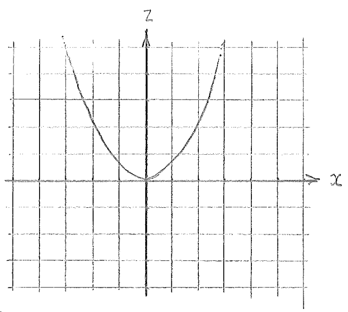
En elliptisk paraboloid med vertex (spets) i origo, z-axeln som axel och x- och y-axlarna som huvudaxlar har ekvationen

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

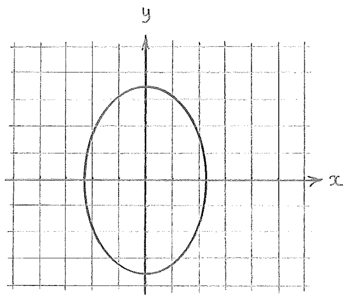
där a och b är positiva konstanter.



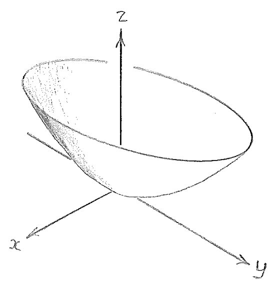
① Paraboloidens skärning med planet $x = 0$ är en parabel $z = \frac{1}{c^2} y^2$.



② Paraboloidens skärning med planet $y = 0$ är en parabel $z = \frac{1}{a^2} x^2$.



③ Paraboloidens skärning med planet $z = 1$ är en ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



④ Paraboloiden $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Svar

Övning 1

a) $x+y=4$ b) $x=3$

c) $x-5y=0$ d) $y=4$

Övning 2

a) $x \geqslant 0$ b) $y<2$

c) $2x+3y \leq 6$ d) $-2 \leq 2x-y \leq 2$

Övning 3

a) $x^2+y^2=9$ b) $x^2+y^2=8$

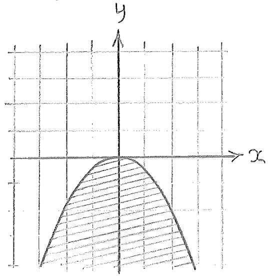
Övning 4

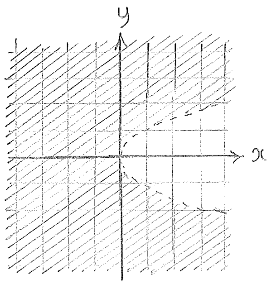
a) $x^2+y^2 \geqslant 4$ b) $1<x^2+y^2 \leq 9$

Övning 5

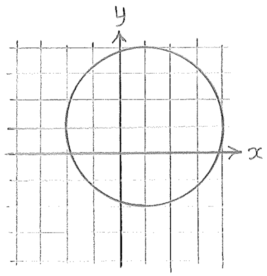
a) $y=\frac{1}{2}x^2$ b) $x=\frac{2}{9}y^2$

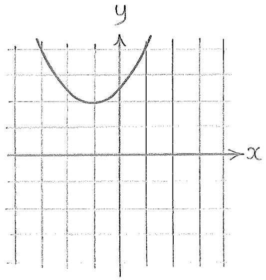
Övning 6

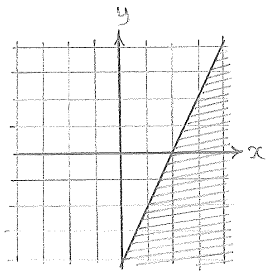
a) 

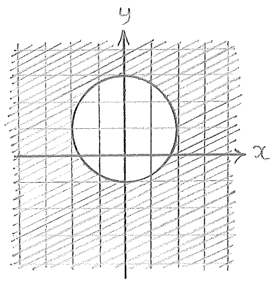
b) 

Övning 7

a) 

b) 

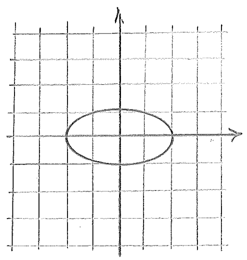
c) 

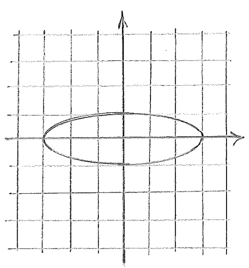
d) 

Övning 8

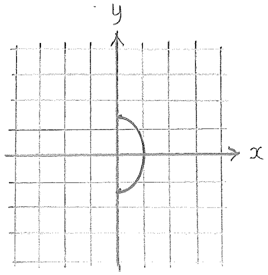
a) $y+2=\frac{1}{2}(x-1)^2$ b) $(x+2)^2+(y-2)^2 \leq 4$

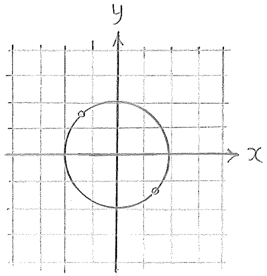
Övning 9

a) 

b) 

Övning 10

a) 

b) 

Övning 11

a) $x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$

Övning 12

Vänster plan: $y = 1$

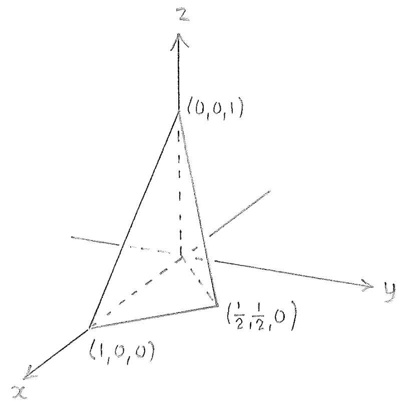
Höger plan: $x + z = 2$

Övning 13

a) Ja

b) $\bar{n} = (2,-1,3)$

Exempel 1



Övning 14

Vänster sfär: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

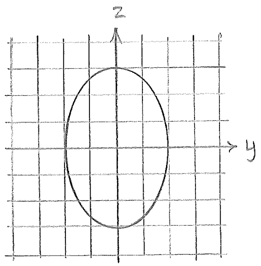
Höger sfär: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$

Övning 15

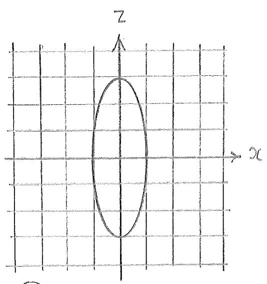
a) Området på och utanför en sfär med medelpunkt i origo och radie $\sqrt{3}$.

b) Ett ihåligt klot med medelpunkt i origo, yttre radie 3 och inre radie 1.

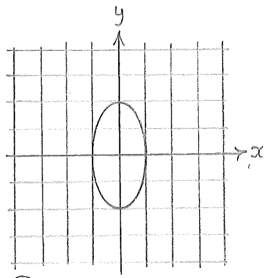
Övning 16



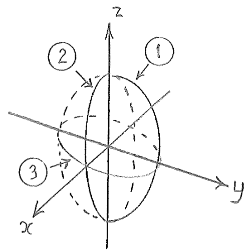
① Planet $x=0$



② Planet $y=0$



③ Planet $z=0$



Övning 17