Föreläsning 1

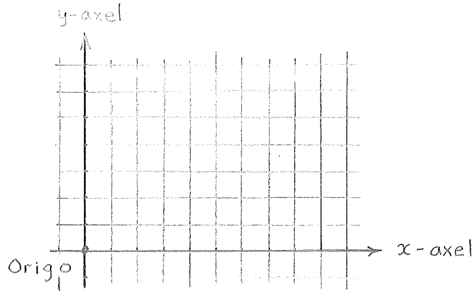
- Koordinatsystem i planet
  - Rektangulära koordinater
  - Polära koordinater
- Koordinatsystem i rummet
  - Rektangulära koordinater
  - Cylindriska koordinater
  - Sfäriska koordinater
- Topologiska grundbegrepp

Koordinatsystem i planet

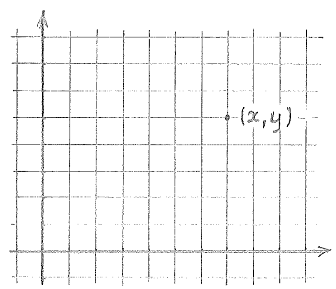
Koordinatsystem används för att med tal ange punkters läge i planet.

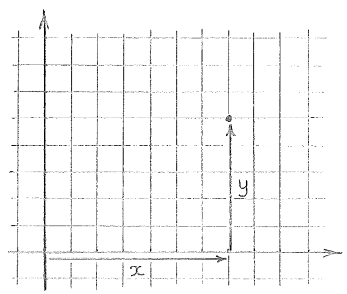
Rektangulära koordinater

Ett rektangulärt koordinatsystem i planet består av ett origo och två vinkelräta koordinataxlar.



En punkts läge kan då anges genom att utifrån origo specificera sträckorna x och y som vi behöver gå i resp. koordinataxelriktning för att nå punkten.





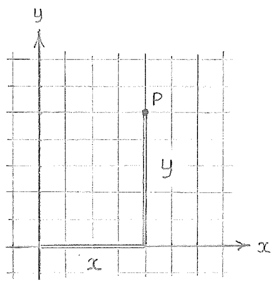
Talparet (x, y) kallas för punktens koordinater.

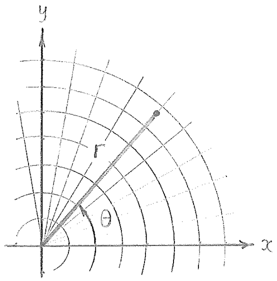
Polära koordinater

I polära koordinater anges en punkts läge i planet med två koordinater (r, θ), där

r : punktens avstånd till origo,

θ : motursvinkeln mellan den positiva x-axeln och sträckan från origo till punkten.





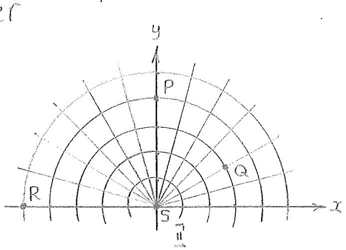
Övning 1: Vilka polära koordinater har punkterna?

P : $(r, \theta) =$

Q : $(r, \theta) =$

R : $(r, \theta) =$

S : $(r, \theta) =$

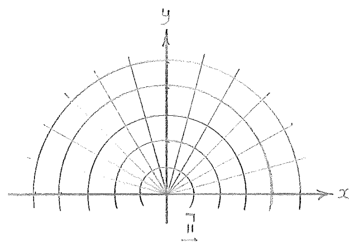


Övning 2: Rita in punkterna.

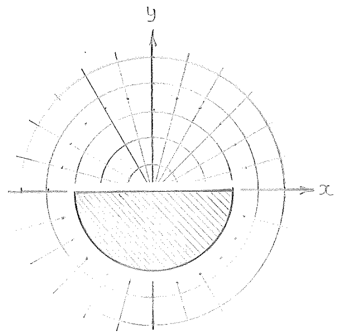
P : $(r, \theta) = (1, \pi/2)$

Q : $(r, \theta) = (3, \pi/4)$

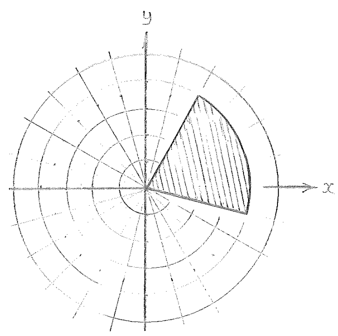
R : $(r, \theta) = (2, 5\pi/4)$



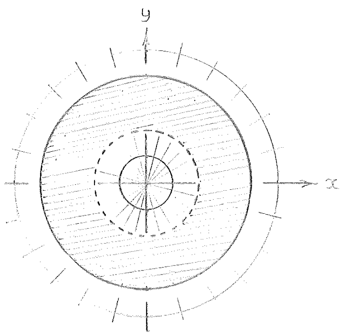
Övning 3: Beskriv följande mängder i polära koordinater.



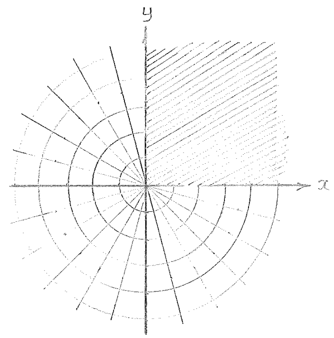
En halvcirkelskiva



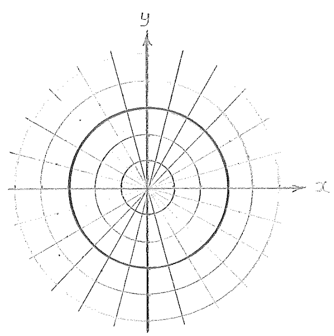
En cirkelsektorskiva



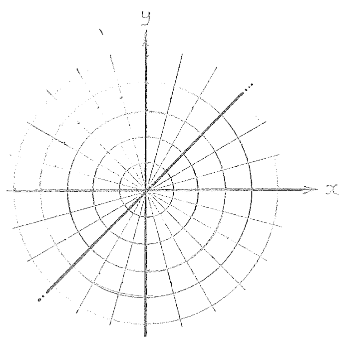
En ring



Första kvadranten



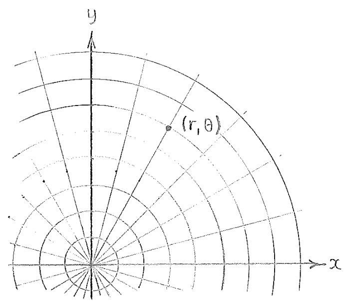
En cirkel



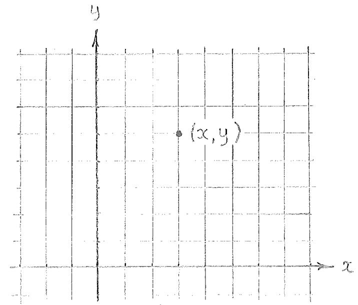
Linjen $y = x$

Sambandet mellan en punkts rektangulära koordinater (x, y) och polära koordinater (r, θ) ges av

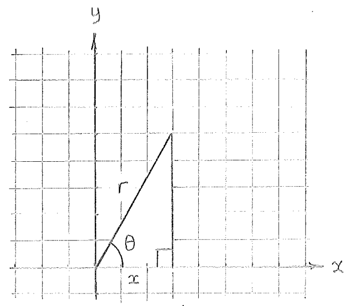
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



① En punkt har de polära koordinaterna (r, θ).

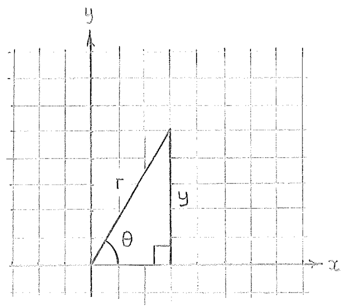


② Samma punkt har de rektangulära koordinaterna (x, y).



③ Trigonometri ger att

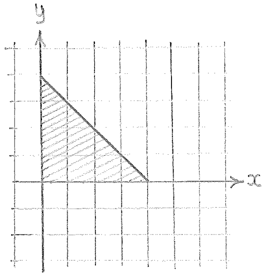
$\cos\theta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r\cos\theta$.



④ Trigonometri ger att

$\sin\theta = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r\sin\theta$.

Exempel 1: Beskriv följande område i polära koordinater.

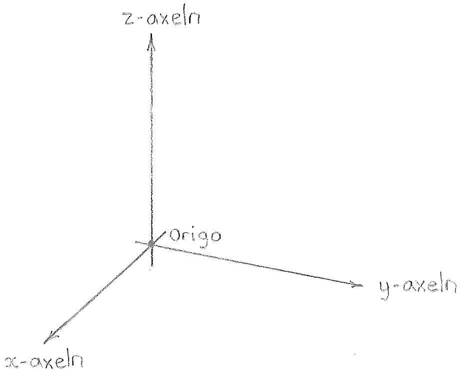


Triangelskiva med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

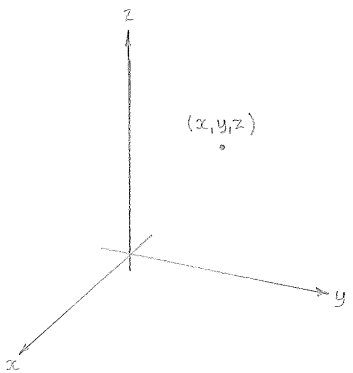
Koordinatsystem i rummet

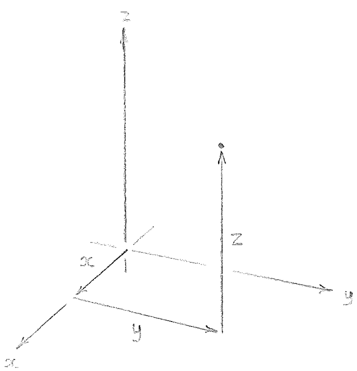
Rektangulära koordinater

Ett rektangulärt koordinatsystem i rummet består av ett origo och tre vinkelräta koordinataxlar.



En punkts läge kan då anges genom att utifrån origo specificera sträckorna x, y och z som vi behöver gå i resp. koordinataxelriktning för att nå punkten.





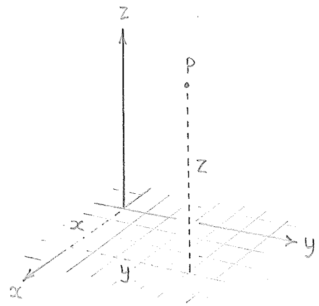
Taltrippeln (x,y,z) kallas för punktens koordinater.

Cylindriska koordinater

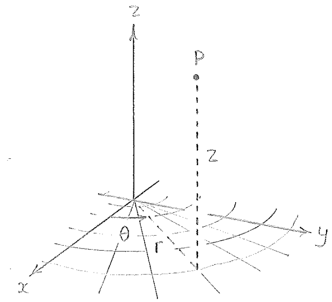
I cylindriska koordinater anges en punkts läge i rummet med tre koordinater (r,θ,z), där

(r,θ) : punktens (x,y)-koordinater uttryckta i polära koordinater,

z : punktens z-koordinat.



Punkten P har de rektangulära koordinaterna (x,y,z).



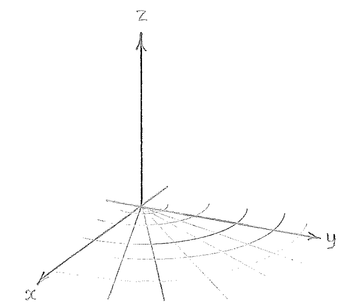
Punkten P har de cylindriska koordinaterna (r,θ,z).

Övning 4: Rita in punkterna.

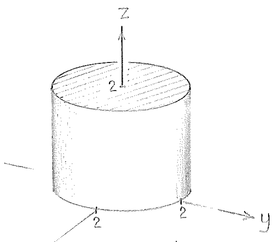
$P: (r,\theta,z) = (3,0,0)$

$Q: (r,\theta,z) = (5,\pi/4,0)$

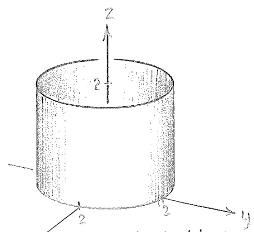
$R: (r,\theta,z) = (0,\pi,3)$



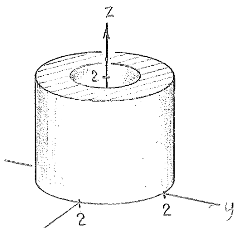
Övning 5: Beskriv följande mängder i cylindriska koordinater.



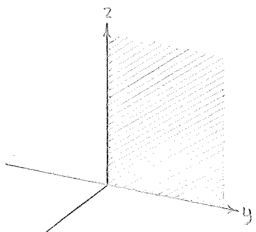
Cylinder



Cylindriskt skal

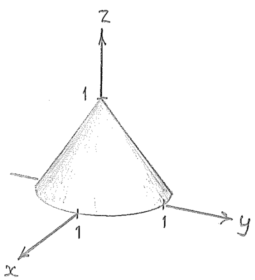


cylindriskt rör
med inre radie 1



Första kvadranten
i yz-planet.

Exempel 2: Beskriv nedanstående kon i cylindriska koordinater.

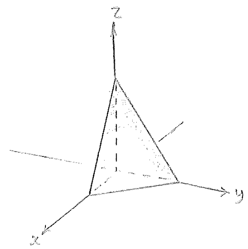


Sambandet mellan en punkts rektangulära koordinater (x, y, z) och cylindriska koordinater (r, θ, z) ges av

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

dvs vi hänger bara på en z-koordinat på de polära koordinaterna i xy-planet.

Exempel 3: Beskriv följande område i cylindriska koordinater.



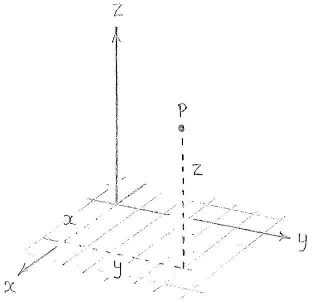
En tetraeder med hörn
i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Sfäriska koordinater

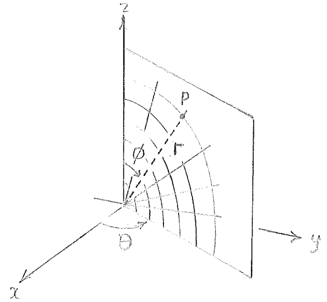
I sfäriska koordinater anges en punkts läge i rummet med tre koordinater (r, ϕ, θ), där

(r, ϕ) : punktens polära koordinater i det halvplan som har z-axeln som kantlinje och som innehåller punkten,

θ : vinkeln mellan positiva x-axeln och halvplanet.



Punkten P har de rektangulära koordinaterna (x, y, z).



Punkten P har de sfäriska koordinaterna (r, ϕ, θ).

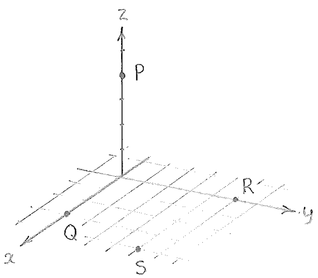
Övning 6: Vilka sfäriska koordinater har punkterna?

P : $(r, \phi, \theta) =$

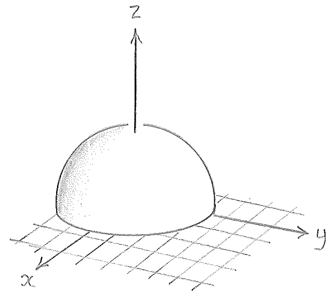
Q : $(r, \phi, \theta) =$

R : $(r, \phi, \theta) =$

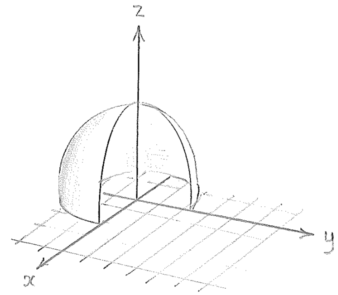
S : $(r, \phi, \theta) =$



Övning 7: Beskriv nedanstående mängder i sfäriska koordinater.

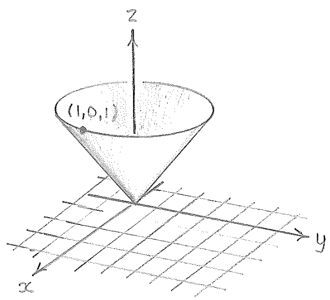


Ett halvklot med radie 2 med medelpunkt i origo.



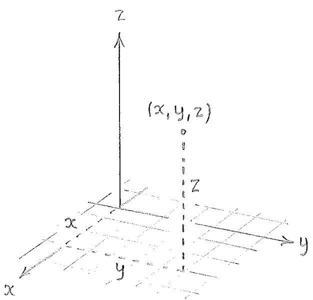
Ett $3/8$-dels sfäriskt skal med radie 2 med medelpunkt i origo.

Exempel 4: Beskriv det koniska skalet nedan i sfäriska koordinater.

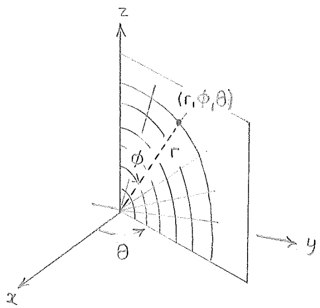


Sambandet mellan en punkts rektangulära koordinater (x, y, z) och rymdpolära koordinater (r, ϕ, θ) ges av

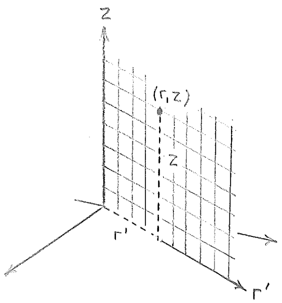
$$\begin{cases} x = r \sin\phi \cos\theta \\ y = r \sin\phi \sin\theta \\ z = r \cos\phi \end{cases}$$



① En punkt har de rektangulära koordinaterna (x,y,z)

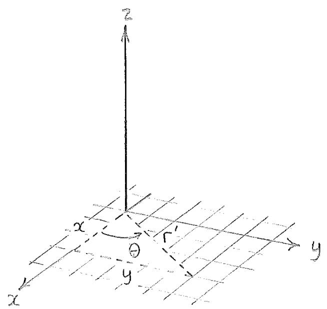


② Samma punkt har de rymdpolära koordinaterna (r,ϕ,θ).



③ I ett rektangulärt koordinatsystem för halvplanet har punkten koordinater

$(r', z) = (r \sin\phi, r\cos\phi)$



④ Trigonometri ger punktens x- och y-koordinater

$x = r'\cos\theta = r\sin\phi\cos\theta$

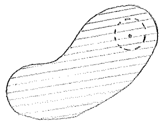
$y = r'\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta$

Topologiska grundbegrepp

omgivning

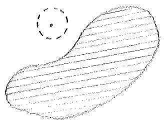
En omgivning av en punkt p är en cirkelskiva (minus randcirkeln) centrerad kring p.

inre punkt



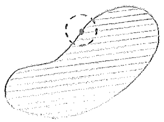
En punkt p är en inre punkt till en mängd om det finns en omgivning till p som ligger helt i mängden.

yttre punkt



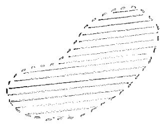
En punkt p är en yttre punkt till en mängd om det finns en omgivning till p som ligger helt utanför mängden.

randpunkt



En randpunkt är en punkt som varken är en inre eller yttre punkt.

öppen

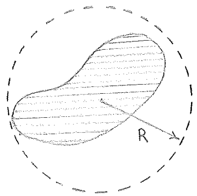


En mängd är öppen om dess randpunkter inte tillhör mängden.

sluten

En mängd är sluten om dess randpunkter tillhör mängden.

begränsad

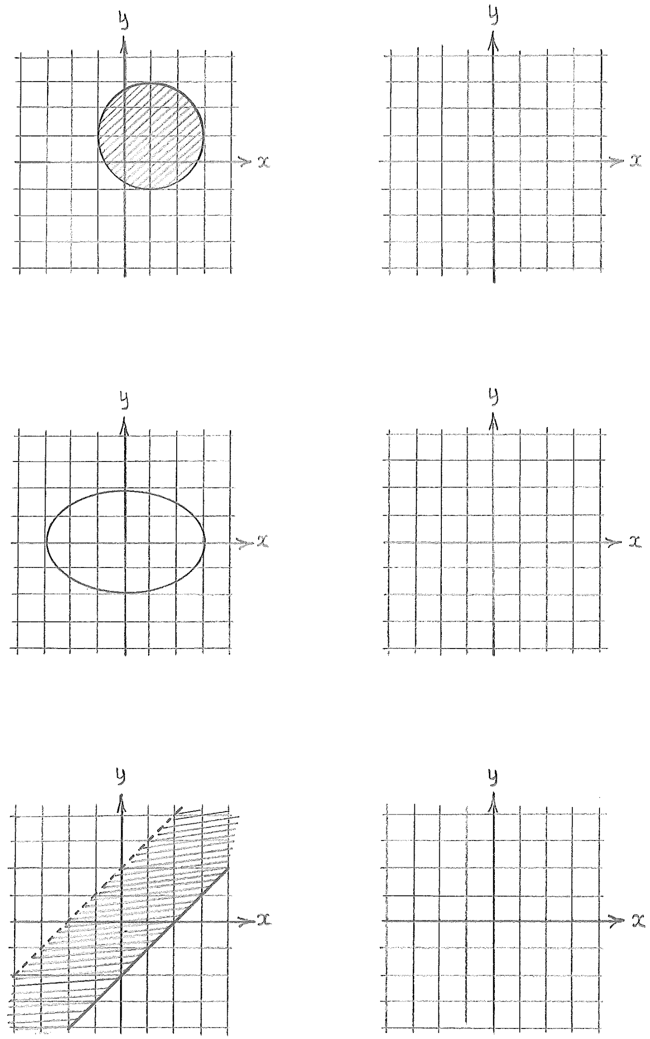


En mängd är begränsad om den ryms inuti en cirkelskiva med ändlig radie.

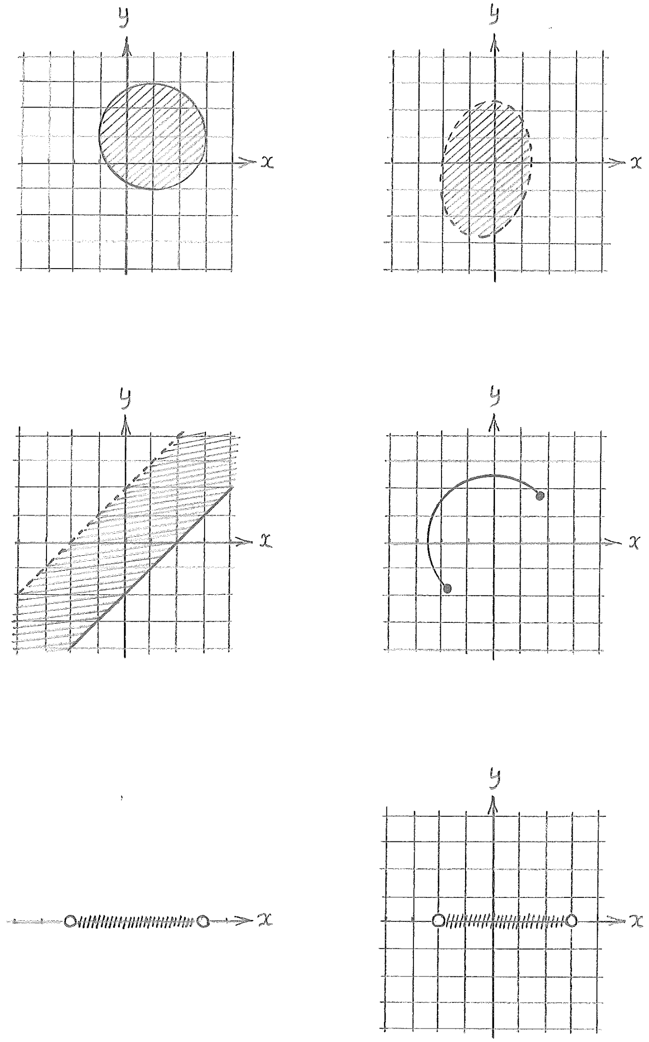
kompakt

sluten + begränsad

Övning 8: Rita ut randen till nedanstående områden. (Streckade kurvor ingår inte i området.)



Övning 9: Kategorisera nedanstående mängder som öppna, slutna, begränsade och kompakta.



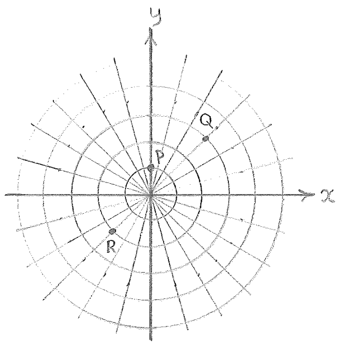
Svar

Övning 1

P: $(r,\theta) = (4, \pi/2)$ Q: $(r,\theta) = (3, \pi/3)$

R: $(r,\theta) = (5, \pi)$ S: $(r,\theta) = (0, *)$

Övning 2



Övning 3

a) $0 \leq r \leq 3, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$

b) $0 \leq r \leq 4, \quad -\pi/6 \leq \theta \leq 2\pi/3$

c) $2 < r \leq 4, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

d) $0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

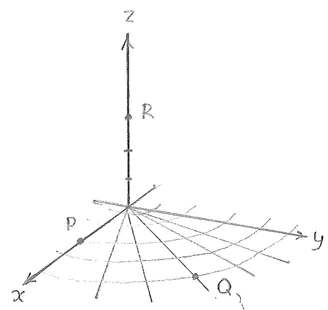
e) $r = 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

f) $r \geq 0, \quad \theta = \pi/4$ eller $\theta = 5\pi/4$

Exempel 1

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq r \leq \frac{4}{\cos\theta + \sin\theta}$$

Övning 4



Övning 5

a) $0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2$

b) $r = 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2$

c) $1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2$

d) $r \geq 0, \quad \theta = \pi/2, \quad 0 \leq z$

Exempel 2

$$r + z \leq 1, \quad z \geq 0$$

Exempel 3

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq r \leq \frac{1-z}{\cos\theta + \sin\theta}$$

Övning 6

P: $(r, \phi, \theta) = (4, 0, *)$ Q: $(r, \phi, \theta) = (3, \pi/2, 0)$

R: $(r, \phi, \theta) = (5, \pi/2, \pi/2)$ S: $(r, \phi, \theta) = (4\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4)$

Övning 7

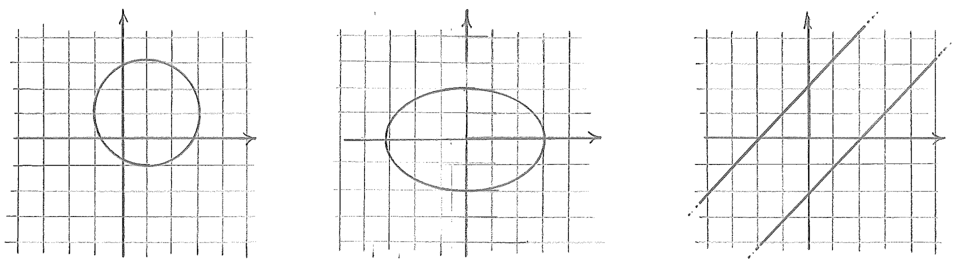
a) $0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

b) $r = 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad \pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$

Exempel 4

$0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad \phi = \pi/4, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Övning 8



Övning 9

a) Sluten, begränsad, kompakt

b) öppen, begränsad

c) –

d) öppen, begränsad

e) begränsad