

Föreläsning 2

- Parameterkurvor
 - Kurvor i planet
 - Kurvor i rummet
 - Orienterade kurvor
- Riktningsvektor
 - Hastighet och acceleration
 - Newtons andra lag
 - Singulära punkter
- Båglängdsintegraler
 - Längd av kurva
 - Bågelement

Parameterkurvor

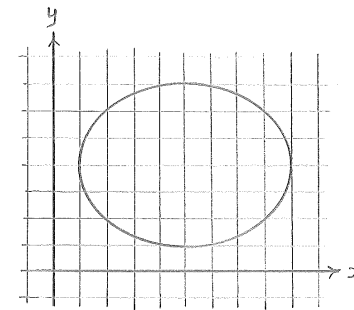
Parameterkurvor är ett sätt att beskriva kurvor med hjälp av en parameter.

Kurvor i planet

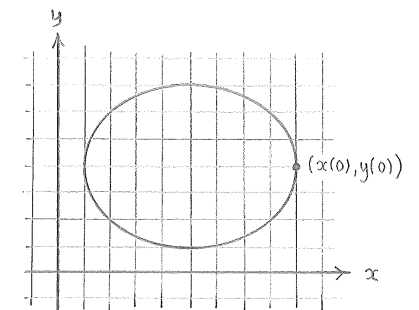
En kurva i planet där x - och y -koordinaterna styrs av en parameter t ,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{alternativt} \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

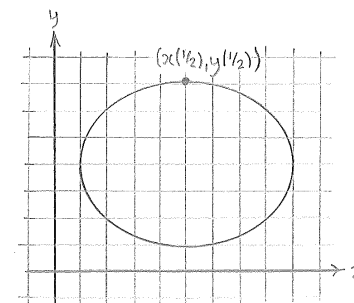
kallas för en parameterkurva.



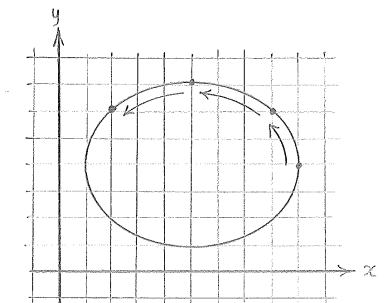
① Parameterkurvan
 $x(t) = 5 + 4 \cos \pi t$
 $y(t) = 4 + 3 \sin \pi t$



② Parametervärdet $t=0$
ger en punkt $(x(0), y(0)) = (9, 0)$ på kurvan.



③ När t ändras till $t=1/2$
glider punkten utmed kurvan.



④ Genom att variera t
genomlöps kurvan.

Övning 1: Givet parameterkurvan

$$(x, y) = (t^2 - 4, 2t + 1), \quad (t \text{ parameter}).$$

- a) Bestäm punkterna som svarar mot $t = -2, -1, 0, 1$ och 2 .

$$(x(-2), y(-2)) = (\square, \square)$$

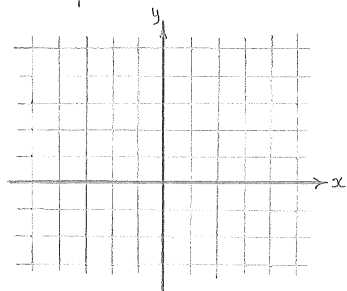
$$(x(-1), y(-1)) = (\square, \square)$$

$$(x(0), y(0)) = (\square, \square)$$

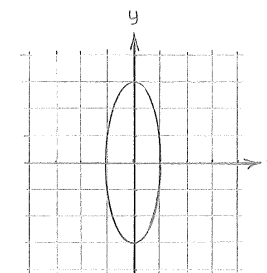
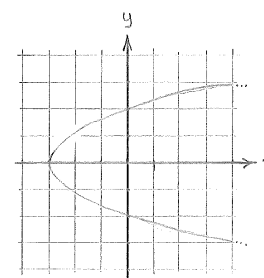
$$(x(1), y(1)) = (\square, \square)$$

$$(x(2), y(2)) = (\square, \square)$$

- b) Skissera parameterkurvan.

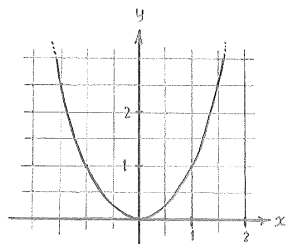


Exempel 1: Parametrisera kurvorna.



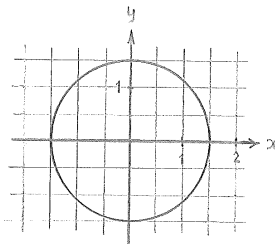
Övning 2: Parametrisera kurvorna.

a)



En parabel

b)



En cirkel

a) $(x, y) =$

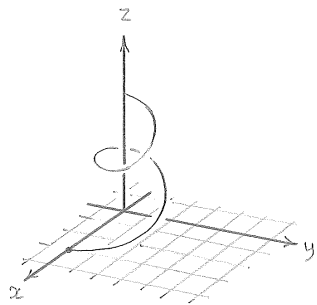
b) $(x, y) =$

Kurvor i rummet

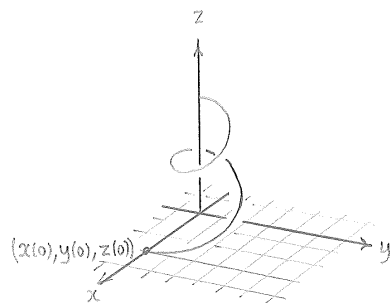
En kurva i rummet där x -, y - och z -koordinaterna styrs av en parameter t ,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{alternativt } \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

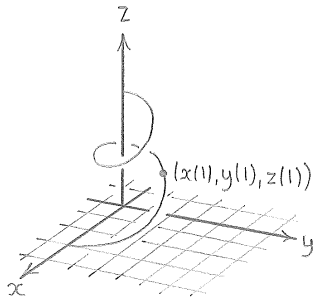
kallas för en parameterkurva.



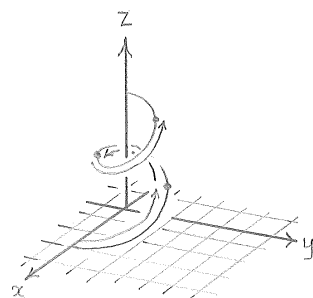
① En parameterkurva $(x(t), y(t), z(t))$.



② Parametervärdet $t=0$ ger en punkt $(x(0), y(0), z(0))$ på kurvan.



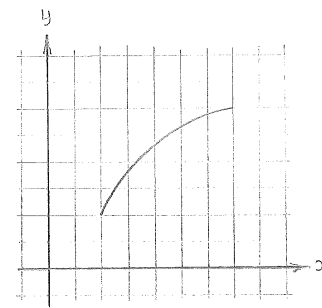
③ När t ändras till $t=1$ glider punkten utmed kurvan.



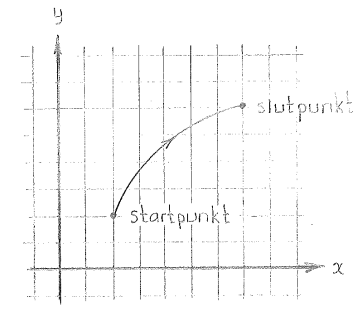
④ Genom att variera t genomlöps kurvan.

Orienterade kurvor

En kurva är orienterad om den ges en genomloppsriktning.

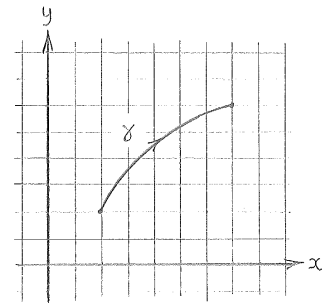


En kurva

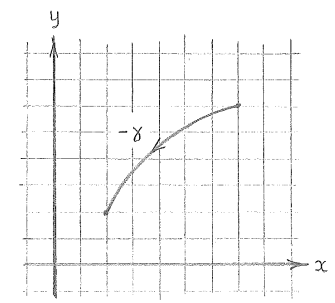


En orienterad kurva

Om γ är en orienterad kurva, då betecknar $-\gamma$ samma kurva med omvärd genomloppsriktning.



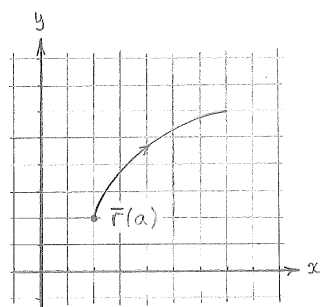
Den orienterad kurva γ



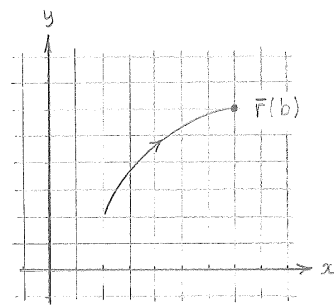
Den orienterade kurvan $-\gamma$

En orienterad parameterkurva beskrivs genom att parametern t anges gå från ett startvärde $t=a$ till ett slutvärde $t=b$,

$$t: a \rightarrow b.$$

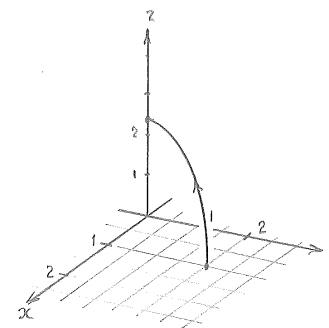


① Parametervärdet $t=a$ svarar mot startpunkten.

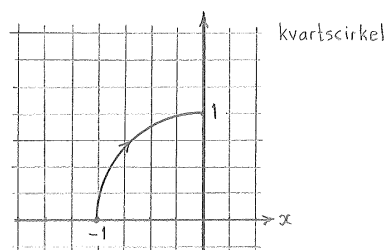
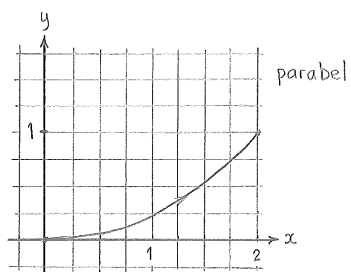


② Parametervärdet $t=b$ svarar mot slutpunkten.

Exempel 2: Parametrisera den orienterade kvarts-cirkeln som har medelpunkt i origo.



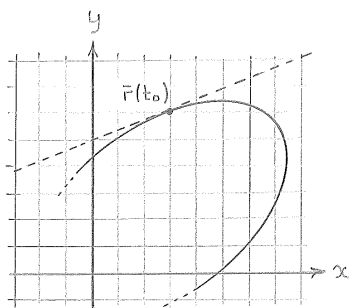
Övning 3: Parametrisera de orienterade kurvorna



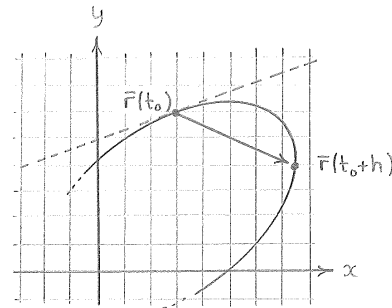
Riktningsvektor

Parameterkurvan $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ har i punkten $\vec{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ en tangenriktning som är parallell med vektorn

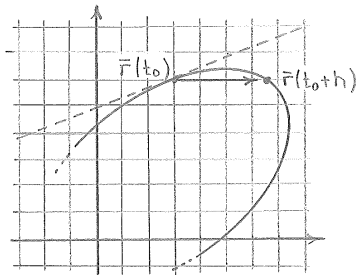
$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right|_{t=t_0} = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)).$$



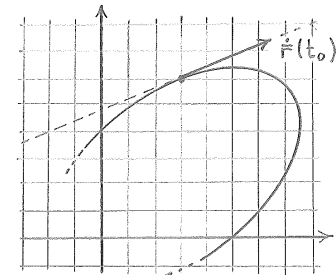
- ① Tangenriktningen i punkten $\vec{r}(t_0)$ söks.



- ② Välj $t=t_0+h$ och bilda vektorn $\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)$.



- ③ När h minskar närmar sig vektorn $\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)$ tangentens riktning men har en längd som krymper.



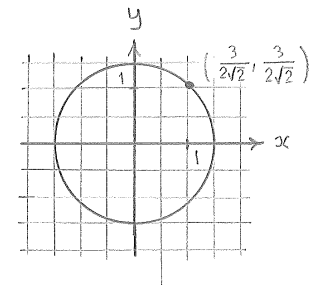
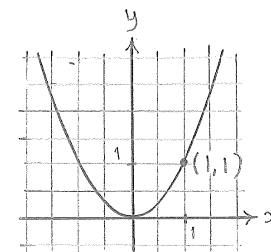
- ④ Gränsvärdet av den omskalade vektorn $\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h}$ kommer peka i tangentens riktning.

Övning 4: Bestäm riktningsvektorn i punkten som svarar mot $t=3$.

a) $\vec{r}(t) = (t^2 - t, 1 - t)$

b) $\vec{r}(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, t^2)$

Övning 5: Använd parametreringen från övning 2 för att bestämma riktningsvektorn i punkten.



Exempel 4: Bestäm de punkter där parameterkurvan

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 2t, t^2 + 2t)$$

har en horisontell tangent.

Hastighet och acceleration

Om en partikels läge ges av parameterkurvan

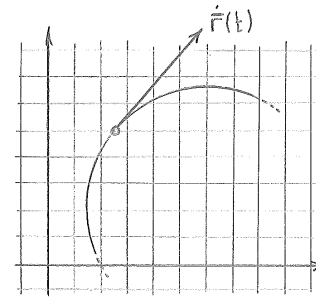
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

vid tidpunkten t , då är

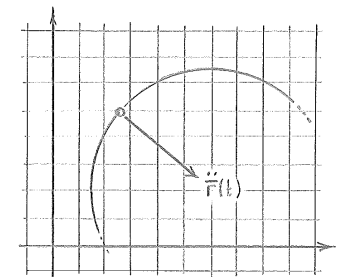
$\dot{\vec{r}}(t)$ = partikelns hastighet

$|\dot{\vec{r}}(t)|$ = partikelns fart

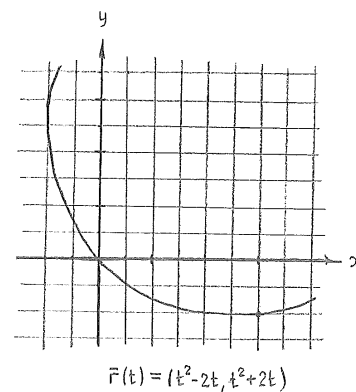
$\ddot{\vec{r}}(t)$ = partikelns acceleration



Partikelns hastighet anger den momentana rörelseriktningen och fart.



Partikelns acceleration anger riktningen mot rörelsens centrum vid konstant fart.



Newtons andra lag

Totalkraften \bar{F} på en partikel är lika med partikelns massa m gånger accelerationen,

$$\bar{F} = m \ddot{\mathbf{r}}.$$

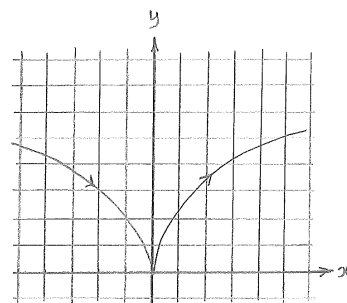
Exempel 5: En kanon i origo skjuter ut en partikelliknande kula med utgångshastigheten $\bar{v} = (10, 10)$. Bestäm kulans bana om tyngdkraften är $\bar{F} = (0, -mg)$, där m är kulans massa.

Singulära punkter

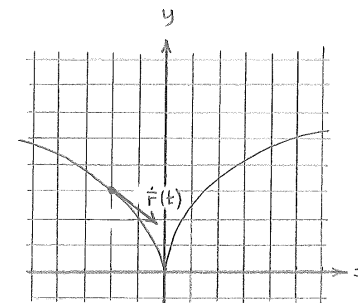
Om en parameterkurva har en punkt där

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \bar{0},$$

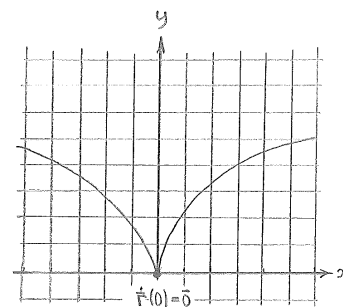
då kallas punkten för singular. I sådana punkter kan kurvan tvärt byta riktning.



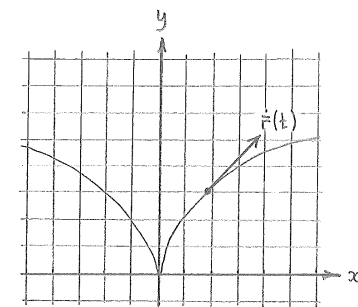
① Parameterkurvan $\bar{r}(t) = (t^2, t^2)$ har en singularpunkt i origo ($t=0$).



② När $t < 0$ närmar sig kurvan origo i riktningen $\dot{\mathbf{r}}(0^-) \parallel (0, -1)$.

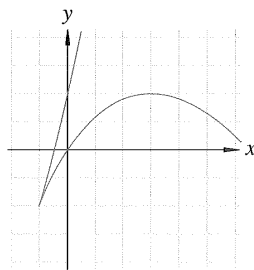


③ Vid origo ($t=0$) stannar kurvan upp, dvs $\dot{\mathbf{r}}(0) = (0, 0)$.



④ När $t > 0$ fortsätter kurvan i en annan riktning $\dot{\mathbf{r}}(0^+) \parallel (0, 1)$.

Övning 6: Bestäm alla singulära punkter på
parameterkurvan $\vec{r}(t) = (2t + t^2, 3t - t^3)$.



Båglängdsintegraler

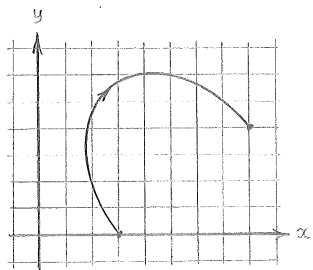
Längd av kurvor

En kontinuerligt deriverbar parameterkurva

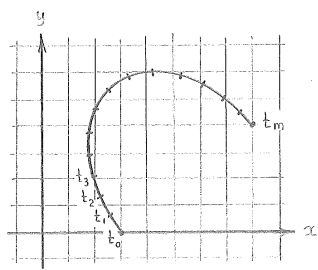
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \text{ där } a \leq t \leq b,$$

har längden

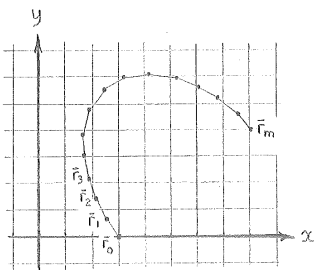
$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$



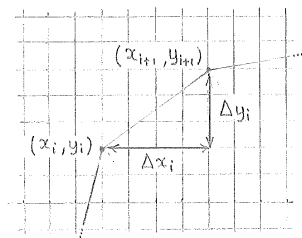
- ① Vi ska bestämma längden av kurvan
 $\vec{r} = (x(t), y(t)), t: a \rightarrow b$



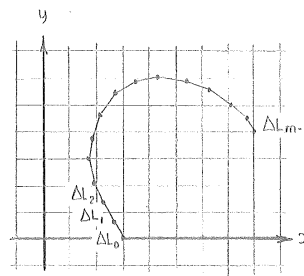
- ② Dela in parameterintervallet $[a, b]$ i delintervall
 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b.$



- ③ Detta ger en indelning av kurvan i rätta linjestycken mellan punkterna $\vec{r}_i = (x(t_i), y(t_i)).$



- ④ Längden av ett linjestycke är
 $\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$



- ⑤ Kurvans totala längd är approximativt

$$L \approx \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \text{finhet} \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \text{finhet} \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i \\ &= \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \end{aligned}$$

- ⑥ Summaformeln för längden är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

Bågelementet

Uttrycket

$$ds = |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

kallas för bågelementet.

För kurvor i rummet

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \text{ där } a \leq t \leq b,$$

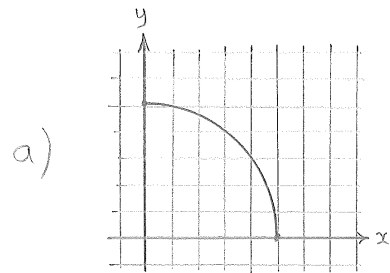
blir bågelementet

$$ds = |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt.$$

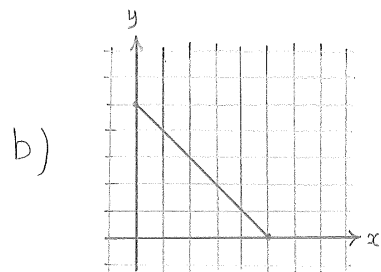
och längden ges av

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt.$$

Övning 7: Bestäm längden av kurvstycket



$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cos t \\y(t) &= 2 \sin t \\t &: 0 \rightarrow \pi/2\end{aligned}$$

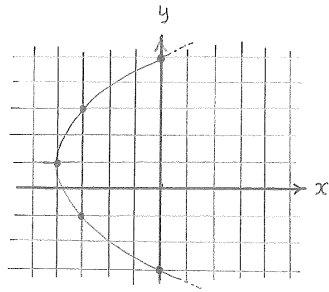


$$\begin{aligned}x(t) &= 1+t \\y(t) &= 1-t \\t &: -1 \rightarrow 1\end{aligned}$$

Svar

Övning 1

- a) $(x(-2), y(-2)) = (0, -3)$
 $(x(-1), y(-1)) = (-3, -1)$
 $(x(0), y(0)) = (-4, 1)$
 $(x(1), y(1)) = (-3, 3)$
 $(x(2), y(2)) = (0, 5)$



Övning 2

- a) $(x, y) = (t, t^2)$
b) $(x, y) = (\frac{3}{2} \cos t, \frac{3}{2} \sin t)$

Exempel 1

- a) $(x, y) = (\frac{3}{4} t^2 - 3, t)$
b) $(x, y) = (\cos t, 3 \sin t)$

Övning 3

- a) $(x, y) = (t, \frac{1}{4} t^2), \quad t: 0 \rightarrow 2$
b) $(x, y) = (\cos t, \sin t), \quad t: \pi \rightarrow \pi/2$

Exempel 2

Parametrisering i sfäriska koordinater

$$r = \sqrt{5}$$

$$\phi : \pi/2 \rightarrow 0$$

$$\theta = \arctan 2$$

Parametrisering i rektangulära koordinater

$$x = \sqrt{5} \sin t \cos \arctan 2 = \sin t$$

$$y = \sqrt{5} \sin t \sin \arctan 2 = 2 \sin t$$

$$z = \sqrt{5} \cos t$$

där $t: \pi/2 \rightarrow 0$.

Övning 4

- a) $\dot{r}(t) = (2t-1, -1)$
 $\dot{r}(3) = (5, -1)$
b) $\dot{r}(t) = (-\pi \sin \pi t, \pi \cos \pi t, 2t)$
 $\dot{r}(3) = (0, -\pi, 6)$

Övning 5

- a) $\dot{r}(t) = (1, 2t)$
 $\dot{r}(1) = (1, 2)$
b) $\dot{r}(t) = (-\frac{3}{2} \sin t, \frac{3}{2} \cos t)$
 $\dot{r}(\pi/4) = (-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}})$

Exempel 4

Punkten $\bar{r}(-1) = (3, -1)$.

Exempel 5

Newtons andra lag $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = (0, -mg)$ tillsammans med begynnelsevillkoren $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ och $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (10, 10)$ ger banan

$$x(t) = 10t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t$$

Övning 6

Punkten $r(-1) = (-1, -2)$.

Övning 7

a) Bågelementet $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2 dt$

Längd $L = \int ds = \int_0^{\pi/2} 2 dt = \pi$

b) Bågelementet $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{2} dt$

Längd $L = \int ds = \int_{-1}^1 \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}$