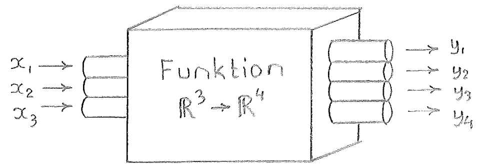
Föreläsning 3

- Funktioner
  - Exempel
  - Funktionsyta
  - Nivåkurvor
  - Nivåytor
- Funktionsbegrepp
  - Sammansättning
  - Elementära funktioner
  - Definitions- och värdemängd
  - Inversfunktion

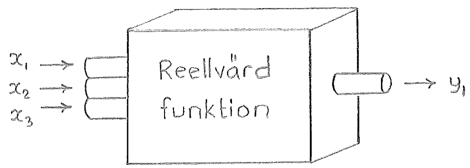
Funktioner

En funktion $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ avbildar m st in-värden $(x_1, \ldots, x_m)$ till n st ut-värden $(y_1, \ldots, y_n)$.

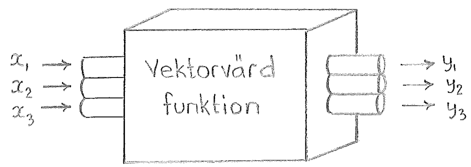


Samma in-värden ger alltid samma ut-värden.

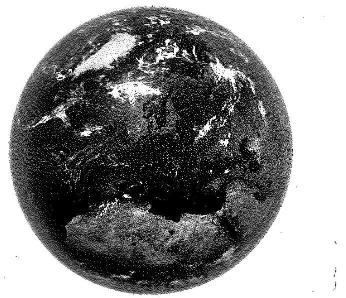
En funktion $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ som bara har ett ut-värde kallas för en reellvärd funktion.



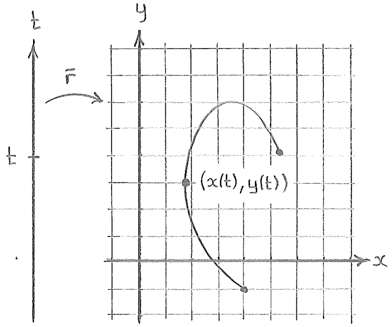
En funktion $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ som har flera ut-värden kallas för en vektorvärd funktion.



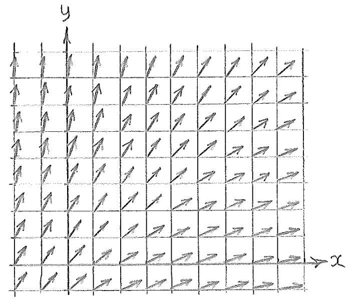
Exempel på funktioner



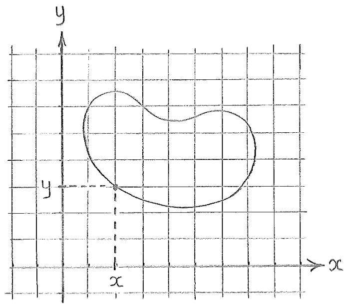
$T(x,y)$ = Temperaturen på jordens yta i positionen longitud x och latitud y kl. 8.20 den 25 februari 2019



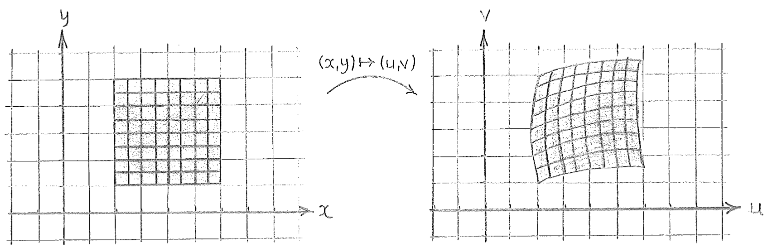
En parameterkurva $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ är en funktion $\bar{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.



Ett vektorfält tillordnar till varje punkt (x,y) en vektor $\bar{v} = \bar{v}(x,y)$ är en funktion $\bar{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



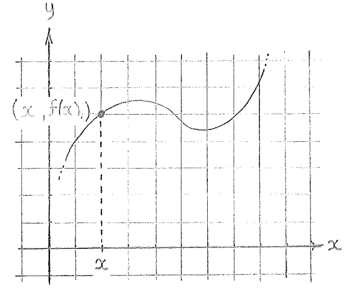
Ekvationen för en kurva i planet kan användas för att implicit definiera y som en funktion av x.



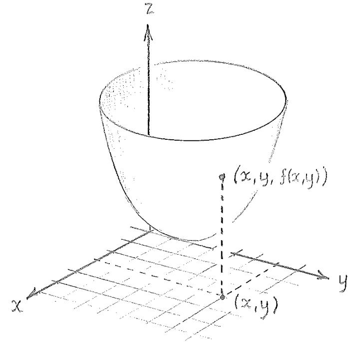
En deformation av en platta kan beskrivas av en funktion $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$ som är en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Funktionsyta

För att undersöka vilka egenskaper en reellvärd funktion $f(x,y)$ har ritar vi upp funktionsytan.



För en funktion $f(x)$ av en variabel markerar vi för varje x punkten $(x, f(x))$. Då får vi funktionskurvan.



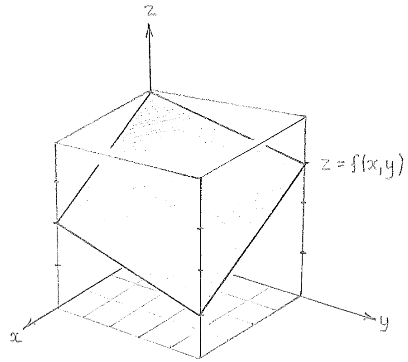
För en funktion $f(x,y)$ av två variabler markerar vi för varje (x,y) punkten $(x, y, f(x,y))$. Då får vi funktionsytan.

Övning 1: Bestäm

a) $f(0,0)$

b) $f(4,0)$

c) $f(4,5)$



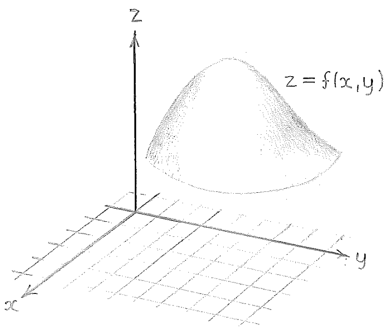
Varje skalstreck är 1 enhet

Nivåkurvor

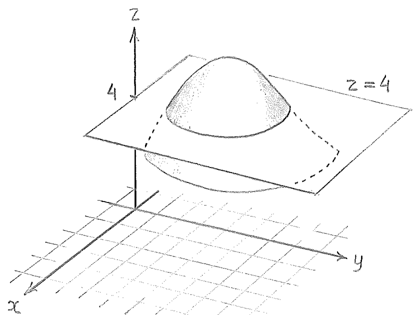
En nivåkurva till en reellvärd funktion $f(x,y)$ är en kurva i x,y-planet där f är konstant,

$$f(x,y) = C$$

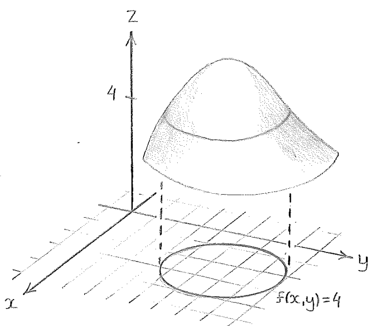
för ett fixt värde på C.



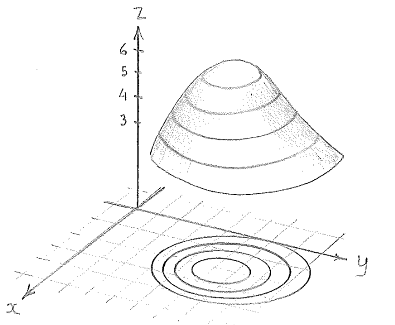
(1) Vi har en reellvärd funktion och ritar upp dess funktionsyta $z = f(x,y)$.



(2) Välj $z = 4$ och betrakt skärningskurvan mellan planet $z = 4$ och funktionsytan.

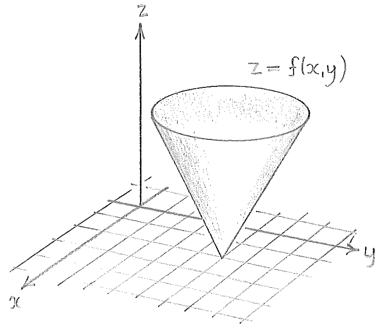


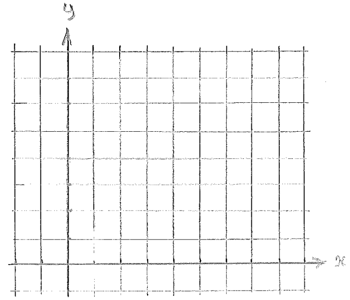
(3) Kurvan nedprojicerad på x,y-planet ger nivåkurvan $f(x,y) = 4$.

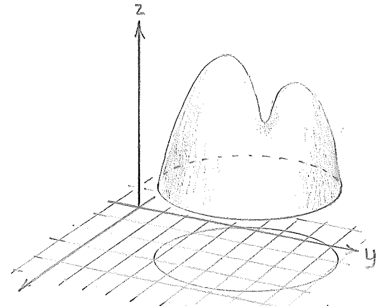


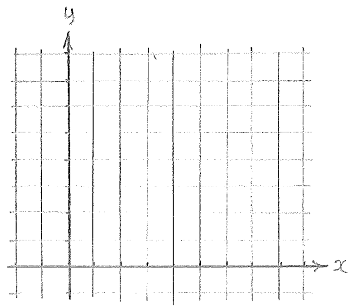
(4) Genom att välja olika nivåer på planet $z = C$ får vi olika nivåkurvor $f(x,y) = C$.

Övning 2: Skissera nivåkurvor till funktionerna.





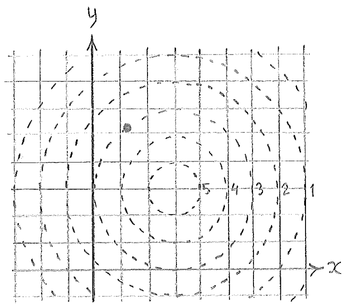


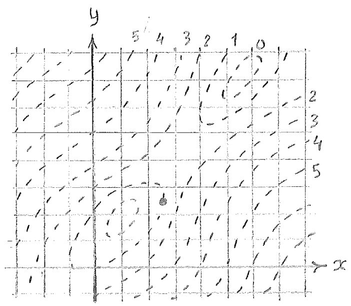


Övning 3: Markera en riktning vid punkten ditåt

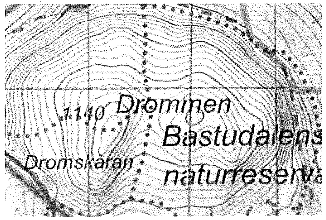
a) funktionen växer

b) funktionen avtar

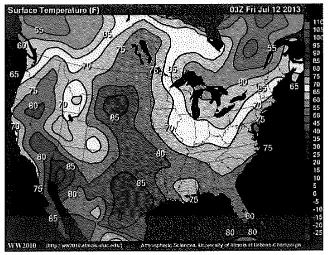




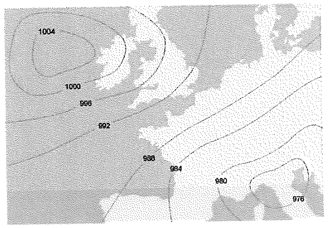
Exempel på nivåkurvor



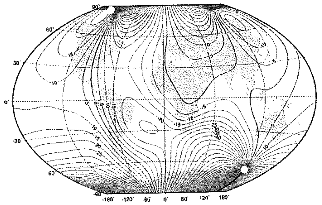
Höjdlinjer på en karta är nivåkurvor för höjden.



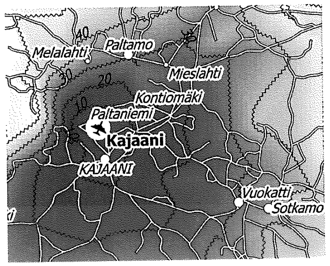
Isotermer är nivåkurvor för temperaturen.



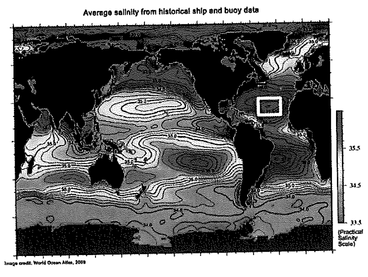
Isobarer är nivåkurvor för trycket.



Isogoner är nivåkurvor för den magnetiska deklinationen.



Isokronerna i kartan ovan är nivåkurvor för restiden med bil till Kajana flygplats.



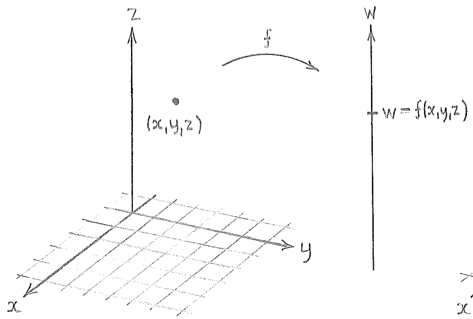
Isohaliner är nivåkurvor för saliniteten, dvs vattnets salthalt.

Nivåytor

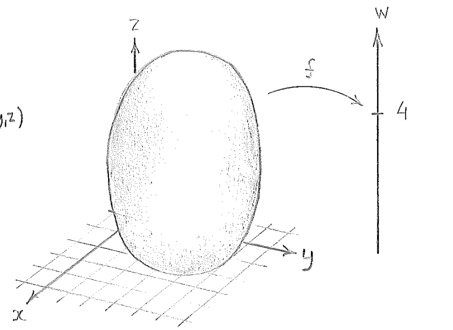
En nivåyta till en reellvärd funktion $f(x,y,z)$ är en yta i rummet där f är konstant,

$$f(x,y,z) = C$$

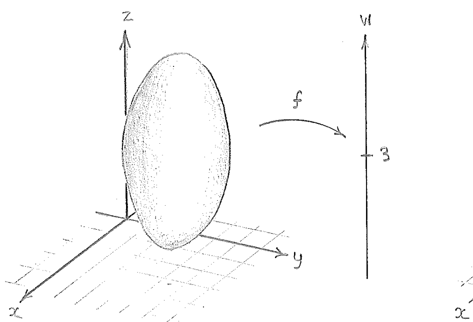
för ett fixt värde på C.



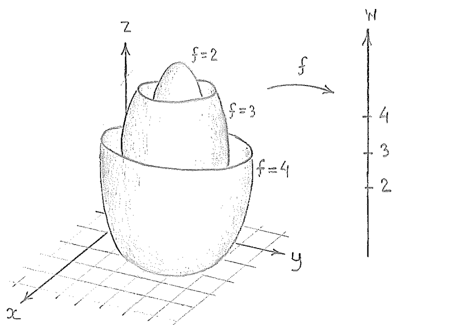
① Betrakta en reellvärd funktion f som avbildar punkter (x,y,z) på värden w.



② Fixera $w = 4$. Alla punkter (x,y,z) som avbildas på $w=4$ bildar nivåytan $f(x,y,z) = 4$.



③ Väljer vi en annan nivå $w = 3$. Vi får då på samma sätt nivåytan $f(x,y,z) = 3$.



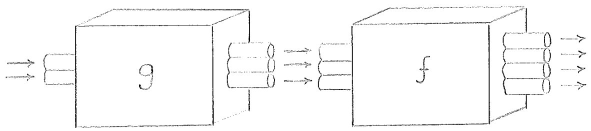
④ Genom att välja olika nivåer $w = C$ får vi olika nivåytor $f(x,y,z) = C$.

Funktionsbegrepp

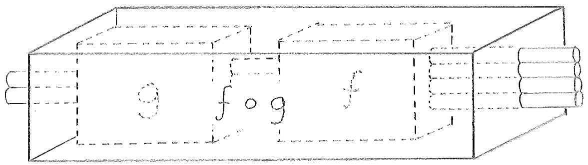
Funktionssammansättning

När vi sätter samman två funktioner så innebär det att vi utför dem efter varandra.

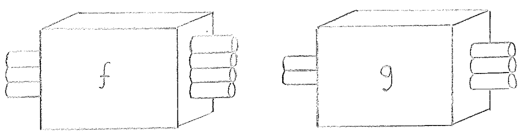
① Antag att vi har funktionerna $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ och $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.



② Då kan vi sätta ihop g med f genom att utvärdena från g blir invärden till f.



③ Den sammansatta funktionen $f\circ g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ är den funktion som avbildar via g och därefter f i ett steg.



④ Däremot går det inte att bilda $g\circ f$ eftersom antalet utvärden från f inte är lika med antalet invärden till g.

Övning 4: Om

$$f(x,y) = (xy,\ x-y+2),$$
$$g(x,y) = \left(2x+4y,\ \frac{x}{y}\right),$$

beräkna

a) $f\circ g\,(2,3)$

b) $g\circ f\,(2,3)$

Övning 5: Givet funktionerna

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ \sqrt{xy} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} xy\sin z \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x/y \\ \ln x \\ y \end{pmatrix}$$

Vilka sammansättningar kan bildas?

a) $f\circ h$ b) $g\circ h$ c) $f\circ g\circ h$

Elementära funktioner

Alla elementära funktioner byggs upp genom sammansättning av följande enkla funktioner

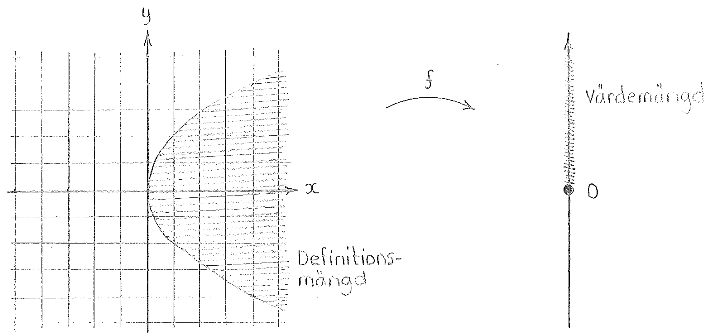
* $(x, y) \longmapsto x + y$
* $(x, y) \longmapsto x - y$
* $(x, y) \longmapsto x \cdot y$
* $(x, y) \longmapsto x / y$
* $(x, y) \longmapsto$ konstant
* Exponential- och logaritmfunktionen
* Trigonometriska och cyklometriska funktioner

Exempel 1: Skriv $f(x,y,z) = xy\, e^{\sin x + z}$ som en sammansättning av enkla funktioner.

Definitions- och värdemängd

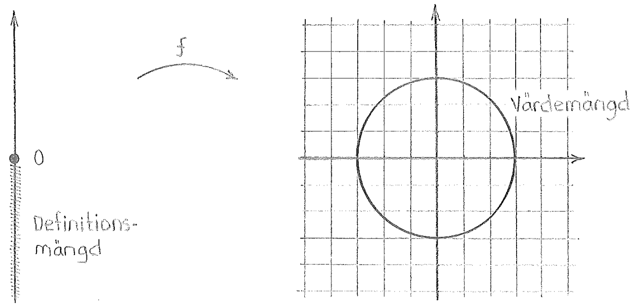
Definitionsmängden till en funktion är alla punkter där funktionen är definierad.

Värdemängden till en funktion är alla värden som funktion antar.



(1) Funktionen $f(x,y) = \sqrt{4x - y^2}$ är definierad där $4x - y^2 \geq 0$.

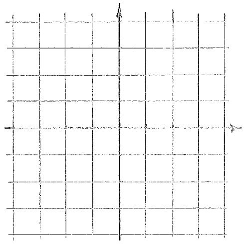
(2) Funktionen antar alla värden ≥ 0.



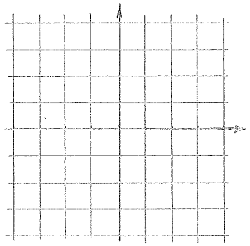
(1) Funktionen $f(t) = (\cos\sqrt{-t}, \sin\sqrt{-t})$ är definierad för $t \leq 0$.

(2) Funktionen antar alla värden på cirkeln med centrum i origo och radie 3.

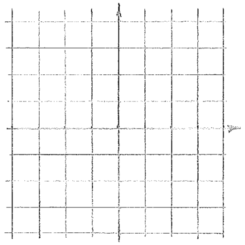
Övning 6: Skissera definitionsmängderna.



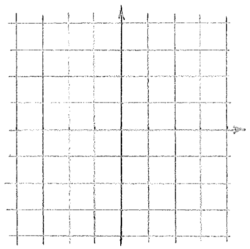
$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$



$f(x,y) = \frac{1}{x-y}$



$f(x,y) = \ln\left(y - \frac{1}{x}\right)$



$f(x,y) = (\ln(x+y), x+\sqrt{y})$

Övning 7: Ingår punkten (2,3) i värdemängden?

a) $f(x,y,z) = (2x, y+z)$

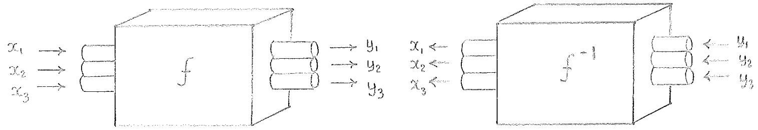
b) $f(x,y) = (\sqrt{x+y}, x-y)$

c) $f(x,y) = (\sqrt{x+y}, x+y)$

d) $f(x,y) = \left(\cos(x^2y+\pi), \frac{x+y}{x-y}\right)$

Inversfunktion

Inversfunktionen f^{-1} avbildar utvärden till f tillbaka till motsvarande invärde.

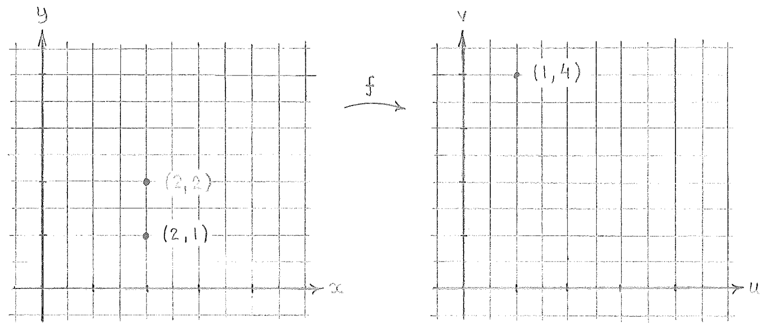


Om f avbildar invärdet (x_1,x_2,x_3) till utvärdet (y_1,y_2,y_3), då arbetar f^{-1} baklänges och avbildar (y_1,y_2,y_3) tillbaka till (x_1,x_2,x_3).

Exempel 2: Bestäm inversfunktionen till

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ x+y \end{pmatrix}$$

Alla funktioner har inte en inversfunktion.



Funktionen $f(x,y) = \left(\frac{x}{y} - x + y,\ 4(x-1)^2\right)$ avbildar båda invärdena (2,1) och (2,2) till samma utvärde (1,4) och därför kan ingen "baklängesfunktion" f^{-1} konstrueras.

Svar

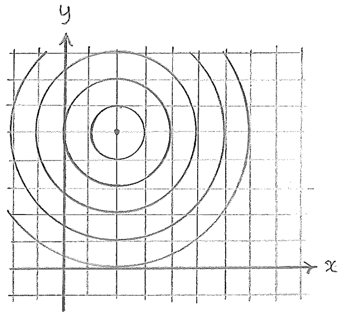
Övning 1

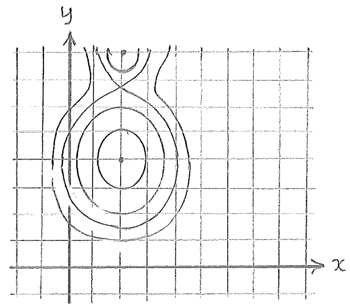
a) $f(0,0) = 4$

b) $f(4,0) = 2$

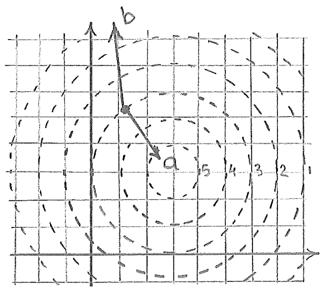
c) $f(4,5) = 1$

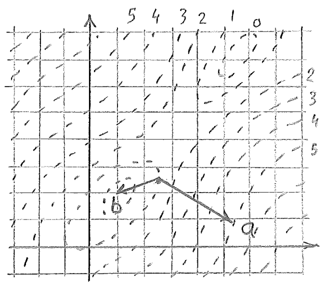
Övning 2





Övning 3





Övning 4

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{g}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 16 \\ 2/3 \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 32/3 \\ 52/3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{g}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$

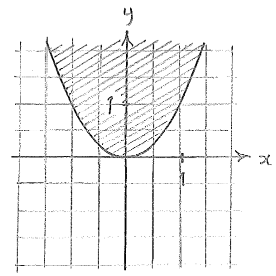
Övning 5

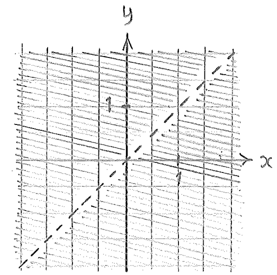
a) Nej b) Ja c) Ja

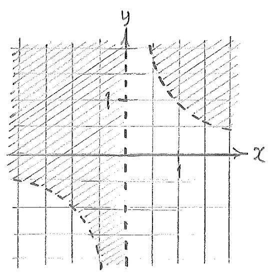
Exempel 1

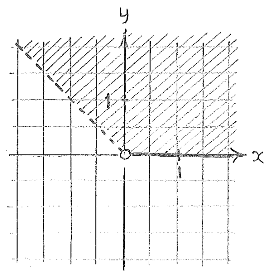
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ \sin x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ \sin x + z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ e^{\sin x + z} \end{pmatrix} \mapsto xye^{\sin x + z}$$

Övning 6









Övning 7

a) Ja, $(x,y,z)=(1,1,2)$ avbildas på $(2,3)$

b) Ja, $(x,y)=(7/2,1/2)$ avbildas på $(2,3)$

c) Nej, om $x+y=3$ kan inte $\sqrt{x+y}=2$

d) Nej, eftersom $-1 \leq \cos(\cdot) \leq 1$

Exempel 2

$$f^{-1}: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u^2 \\ v-u^2 \end{pmatrix}$$