Föreläsning 5-6

- Derivata
  - Enkelderivata
  - Partialderivata
  - Tangentplan
  - Högre ordningars derivator
- Kedjeregeln
  - Kedjeregeln för en variabel
  - Kedjeregeln för två variabler
  - Kedjeregeln för flera variabler
- Kedjeregeln i flera led

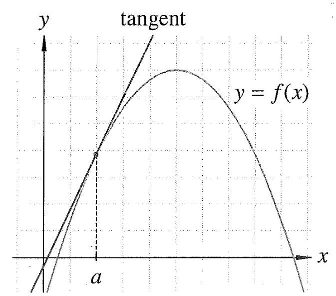
# Derivata för reellvärda funktioner

## Enkelderivata

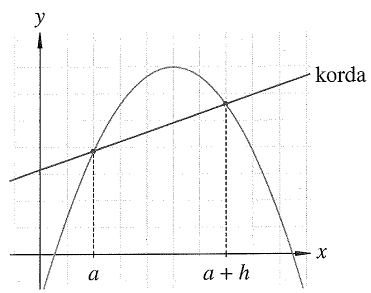
Derivatan av funktionen $f(x)$ i $x = a$ definieras som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

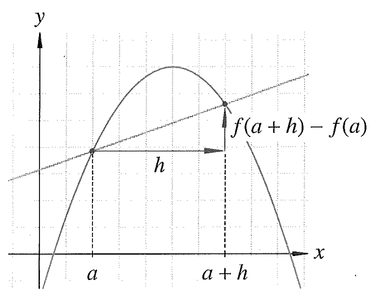
Derivatan anger lutningen av tangenten till $y = f(x)$ i punkten $x = a$.



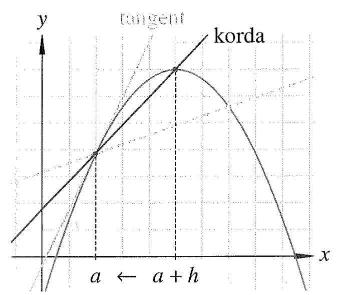

① Funktionskurvan $y = f(x)$ har en tangent genom punkten $(a, f(a))$.




② Bilda kordan genom punkterna $(a, f(a))$ och $(a+h, f(a+h))$.




③ Kordans lutning är $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$




④ Låt $h \to 0$ och då kommer kordans lutning närma sig tangentens lutning.

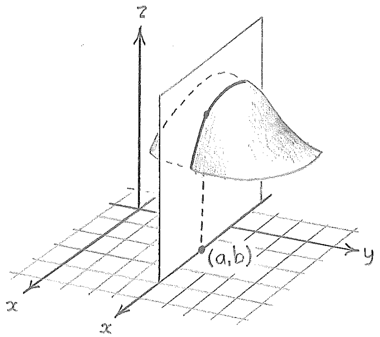
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

## Partialderivata

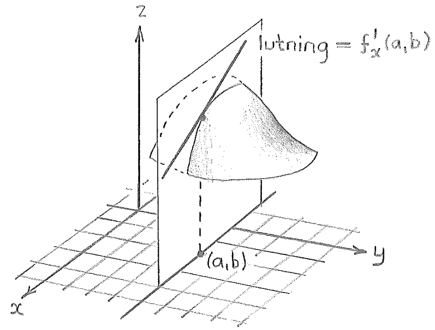
För en reellvärd funktion $f(x,y)$ definieras partialderivatorna av $f$ i punkten $(a,b)$ som

$$f'_x(a,b) = \frac{d}{dx} f(x,b)\Big|_{x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

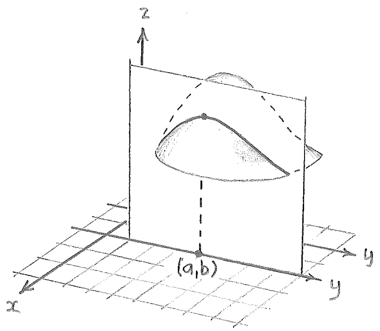
$$f'_y(a,b) = \frac{d}{dy} f(a,y)\Big|_{y=b} = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$



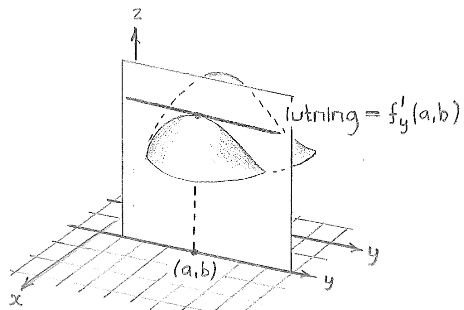

① Håll $y=b$ fix och låt $x$ variera. Då får vi en funktion $f(x,b)$ som bara beror på $x$.




② Derivatan av $f(x,b)$ i $x=a$ betecknas $f'_x(a,b)$ och anger tangentens lutning i $x$-led.




③ Håll $x=a$ fix och låt $y$ variera. Då får vi en funktion $f(a,y)$ som bara beror på $y$.




④ Derivatan av $f(a,y)$ i $y=b$ betecknas $f'_y(a,b)$ och anger tangentens lutning i $y$-led.

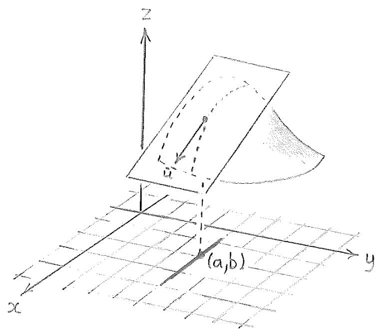
**Övning 1:** Beräkna partialderivatorna av $f(x,y) = xy + x^2$ i $(x,y) = (2,0)$.

**Övning 2:** Bestäm partialderivatorna av $f(x,y,z) = \ln(1 + e^{xyz})$.

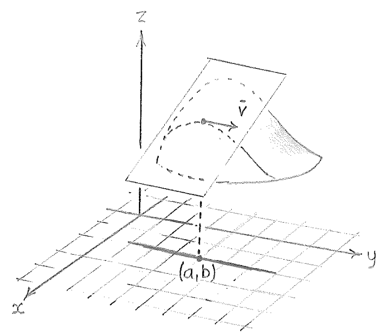
# Tangentplan

En normal $\bar{n}$ till tangentplanet för funktionsytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a, b, f(a,b))$ ges av

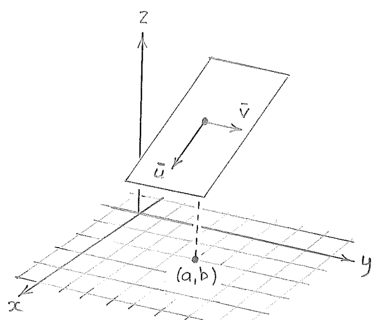
$$\begin{aligned}\bar{n} &= (1, 0, f_x'(a,b)) \times (0, 1, f_y'(a,b)) \\ &= (-f_x'(a,b), -f_y'(a,b), 1).\end{aligned}$$



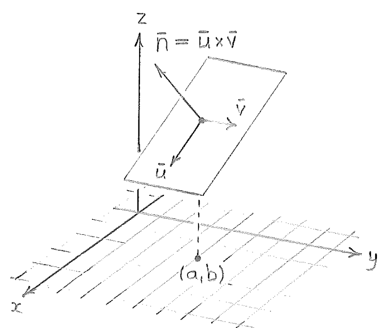

① Partialderivatan $f_x'(a,b)$ anger tangentplanets lutning i $x$-led. Vektorn $\bar{u} = (1, 0, f_x'(a,b))$ // planet.




② Partialderivatan $f_y'(a,b)$ anger tangentplanets lutning i $y$-led. Vektorn $\bar{v} = (0, 1, f_y'(a,b))$ // planet.




③ Vi har två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ som är parallella med tangentplanet.




④ Deras kryssprodukt är alltså en normal till planet.

**Exempel 1:** Bestäm en ekvation för tangentplanet till $z = x^2y + xy^3 - x + 1$ i punkten $(1,1,2)$.

Exempel 2: Bestäm normallinjen (i parameterform) till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(1,1,2)$.
(Normallinjen = den linje som går genom punkten $(1,1,2)$ och är vinkelrät mot ytan i den punkten.)

## Högre ordningars derivator

För en reellvärd funktion $f(x,y)$ definieras andra ordningens partialderivator av $f$ i punkten $(a,b)$ som

$$f''_{xx}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

$$f''_{xy}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

Derivera först $x$ och därefter $y$

$$f''_{yx}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

Derivera först $y$ och därefter $x$

$$f''_{yy}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

Övning 3: Bestäm andra ordningens partialderivator av $f(x,y) = x^2 y + 3y^3 + x$.

Om en funktion är tillräckligt deriverbar spelar det ingen roll i vilken ordning deriveringar sker.

Om $f(x,y)$ är två gånger kontinuerligt deriverbar i punkten $(a,b)$, då är

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b).$$

Övning 4: Funktionen $f(x,y,z)$ är fem gånger kontinuerligt deriverbar. Para ihop derivator som är lika.

$$f'''''_{xyxzy}$$

$$f'''''_{zxxzx} \qquad f'''''_{yyxzy}$$

$$f'''''_{yyxzx} \qquad f'''''_{xzyyx}$$

$$f'''''_{xxzzx}$$

## Kedjeregeln för reellvärda funktioner

Eftersom elementära funktioner byggs upp genom funktionssammansättning av enkla funktioner behövs en deriveringsregel för sammansättningar.

Denna deriveringsregel kallas för kedjeregeln.

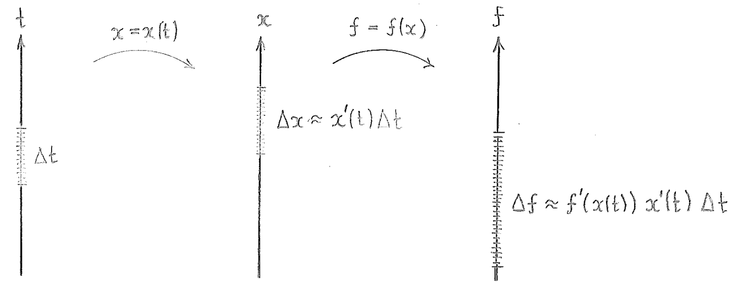
### Kedjeregeln för en variabel

Betrakta sammansättningen

$$t \mapsto x(t) \mapsto f(x(t)).$$

Om $f(x)$ och $x(t)$ är kontinuerligt deriverbara funktioner, då är

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \overbrace{f'(x(t))}^{\text{yttre derivata}} \cdot \underbrace{x'(t)}_{\text{inre derivata}}$$




Vid varje steg i sammansättningen förlängs/förkortas små intervall med derivatan som skalfaktor. Hela sammansättningen får produkten av derivatorna som skalfaktor.

**Övning 5:** Skriv som en sammansättning och derivera med kedjeregeln

a) $\frac{d}{dt}\sqrt{1-3t^2}$

b) $\frac{d}{dt} f(t^2)$

c) $\frac{d}{dt} f(t^2 + h(t))$

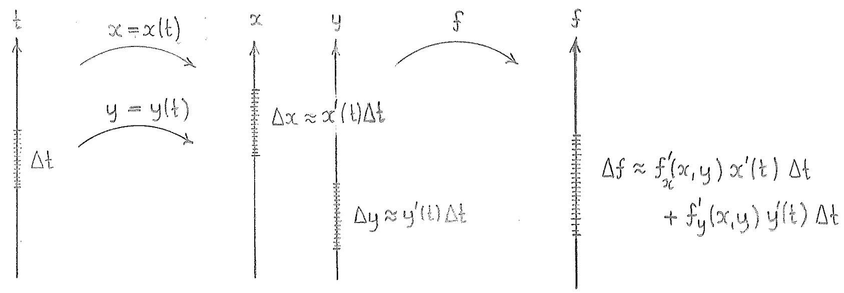
## Kedjeregeln för två variabler

Betrakta sammansättningen

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mapsto f(x(t), y(t))$$

Om $f(x,y)$, $x(t)$ och $y(t)$ är kont. deriverbara funktioner, då är

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \overbrace{f'_x(x,y)}^{\text{yttre derivator}} \cdot \underbrace{x'(t)}_{\text{inre derivator}} + \overbrace{f'_y(x,y)}^{\text{yttre derivator}} \cdot \underbrace{y'(t)}_{\text{inre derivator}}$$




Små intervall förlängs/förkortas med derivatan som skalfaktor. Vid det sista steget i sammansättningen förlängs/förkortas de två intervallen $\Delta x$ och $\Delta y$ med faktorn $f'_x(x,y)$ resp. $f'_y(x,y)$ och adderas för att ge intervallet efter avbildning med $f(x,y)$.

**Exempel 3:** Beräkna $\frac{d}{dt}(t^2 + t^3)$

a) direkt

b) med kedjeregeln

**Övning 6:** Bestäm $\frac{d}{dt} f(t^2, t^3)$, där $f(x,y) = xy$.

a) genom att bestämma $f(t^2, t^3)$ och sedan derivera.

$$f(t^2, t^3) =$$

$$\frac{d}{dt} f(t^2, t^3) =$$

b) Med kedjeregeln

$$x(t) =$$

$$y(t) =$$

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) =$$

**Exempel 4:** Bevisa produktregeln

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)g(t)\right) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t).$$

## Kedjeregeln för flera variabler

Allmänt gäller för sammansättningen

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \longmapsto f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

där alla funktioner är differentierbara att

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

$$= f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n)\, x_1'(t) + \cdots + f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n)\, x_n'(t).$$

# Kedjeregeln i flera led

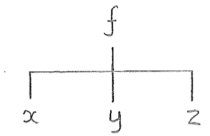
När ett uttryck är sammansatt i flera led måste kedjeregeln användas upprepade gånger.

## Variabelträd

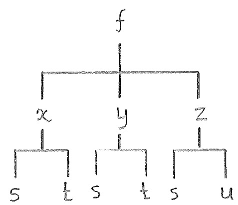
Ett hjälpmedel för att visa hur ett komplext uttryck är uppbyggt är att rita ett variabelträd.

$f(x(s,t), y(s,t), z(s,u(t)))$

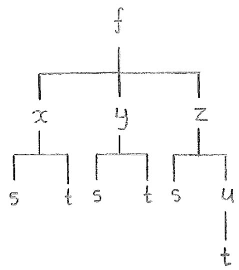
① Antag att vi har ovanstående uttryck.




② Vi börjar med att rita ut variablerna $f$ primärt beror av.




③ Variablerna $x$, $y$ och $z$ beror i sin tur på variablerna $s$, $t$ och $u$.




④ Till sist beror variabeln $u$ på $t$.

**Övning 7:** Rita ett variabelträd till följande uttryck.

a) $f(u(s), v(s,t))$

b) $g(f(h(t)), u(s,t))$

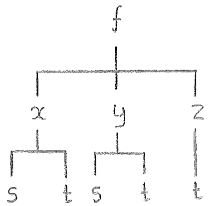
c) $f(xy, x+y)$

d) $f(x\,g(x,y), y\,h(x))$

## Kedjeregeln

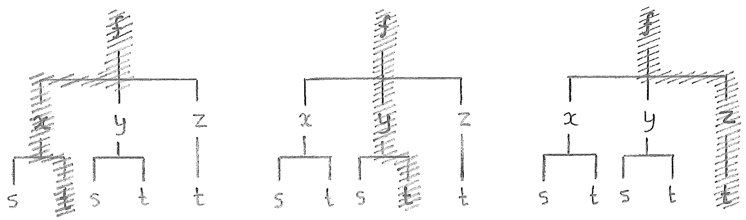
Kedjeregeln medför att varje stig i trädet fram till variabeln ger en term i uttrycket för derivatan. Termen är en produkt av derivator som varje steg i stigen ger upphov till.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(s,t), y(s,t), z(t))$$

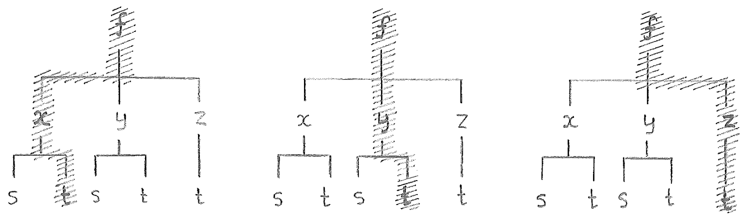


(1) Vi ska bestämma ovanstående derivata.

(2) Rita upp variabelträdet.



(3) Förbind f med stigar fram till alla t i trädet.



$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

(4) Varje stig motsvarar en produkt av partialderivator mellan varje nivå i trädet. Den sökta derivatan är summan av dessa.

## Övning 8:

Bestäm nedanstående derivator med kedjeregeln.

a) $\frac{\partial}{\partial s} f(u(s), v(s,t))$

b) $\frac{\partial}{\partial t} g(f(h(t)), u(s,t))$

c) $\frac{\partial}{\partial x} f(xy, x+y)$

d) $\frac{\partial}{\partial y} f(x\,g(x,y), y\,h(x))$