Föreläsning 6

- Linjär approximation
  - Funktioner av en variabel
  - Funktioner av två variabler
- Differentierbara funktioner
  - Funktioner av en variabel
  - Funktioner av två variabler
  - Deriverbarhet $\neq$ Differentierbarhet
  - Kontinuerligt deriverbara funktioner

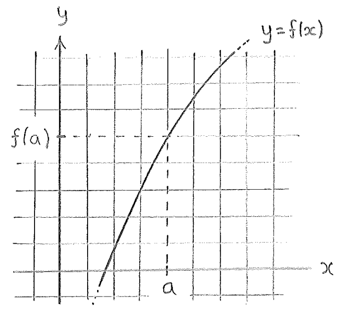
Linjär approximation

Lokalt kring en punkt kan många funktioner approximeras med tangenten/tangentplanet.

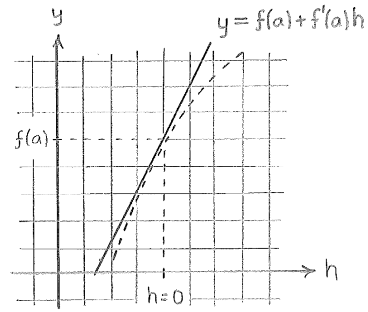
Funktioner av en variabel

En funktion $f(x)$ approximeras linjärt kring $x=a$ med dess tangent

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$



① Funktionen $f(x)$.



② Lokalt kring $x=a$ approximeras f med sin tangent.

Felet i denna approximation studeras i nästa avsnitt.

Övning 1: Bestäm den linjära approximationen (linjariseringen) i $x = 1$ av

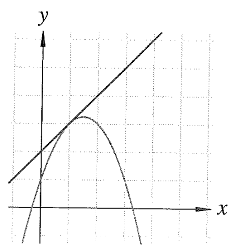
a) $f(x) = 1 + 3x - x^2$

b) $g(x) = 2\sqrt{x}$

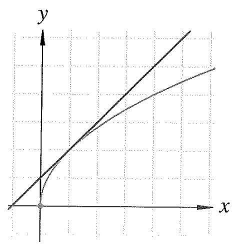
Övning 2: Använd övning 1 för att bestämma ett approximativt värde av

a) $f(1{,}01) \approx$

b) $g(0{,}98) \approx$



Grafen till $f(x) = 1 + 3x - x^2$ och dess tangent i $x = 1$.

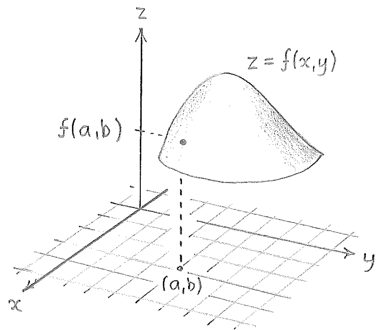


Grafen till $g(x) = 2\sqrt{x}$ och dess tangent i $x = 1$.

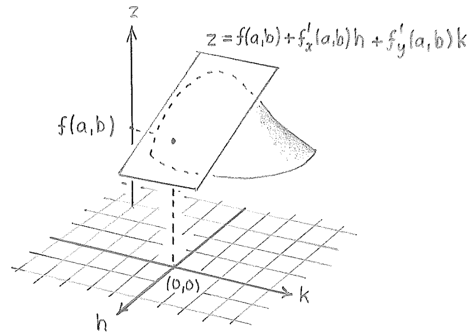
Funktioner av två variabler

En funktion $f(x,y)$ approximeras linjärt kring $(x,y) = (a,b)$ med dess tangentplan

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k.$$



① Funktionen $f(x,y)$.

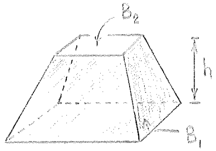


② Lokalt kring $(x,y) = (a,b)$ approximeras f med sitt tangentplanet.

Övning 3: Bestäm den linjära approximationen av $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5y + 7$ kring $(x,y) = (1,2)$.

Exempel 1: Råttorna har gnagt på de gamla pyramiderna så att de numera är stympade. Volymen V av en sådan stympad pyramid ges av

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right)$$



där $h = 6$ (exakt), $B_1 = 8 \pm 0{,}2$ och $B_2 = 2 \pm 0{,}1$. Använd linjarisering för att bestämma volymen med felgränser.

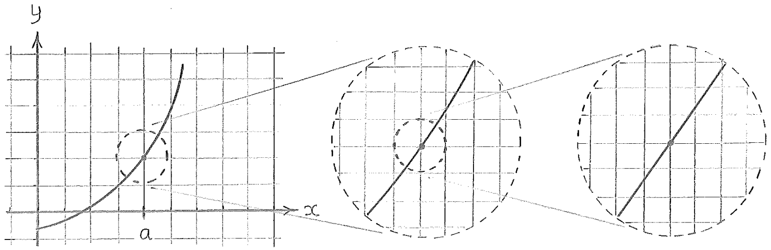
Differentierbara funktioner

Differentierbara funktioner ser lokalt ut som linjära funktioner.

Funktioner av en variabel

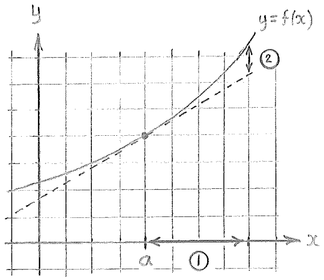
Funktionen $f(x)$ är differentierbar i $x = a$ om

$$f(a+h) = (\text{linjär funktion i } h) + o(h), \quad \text{där } \frac{o(h)}{h} \to 0 \text{ när } h \to 0.$$



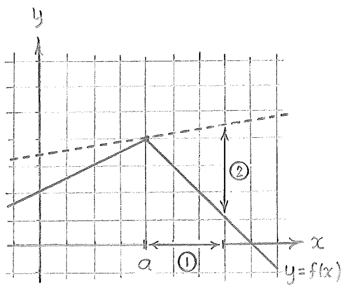
Ju mer vi zoomar in kring $x = a$ desto mer liknar en differentierbar funktion en linjär funktion.

Lite löst: funktionskurvan är tillplattad i $x = a$.



Funktionen är differentierbar i $x = a$ eftersom

② ÷ ① → 0 när ① → 0



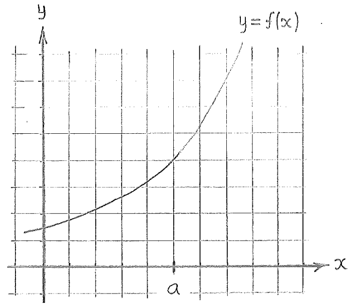
Funktionen är inte differentierbar i $x = a$ eftersom

② ÷ ① ↛ 0 när ① → 0

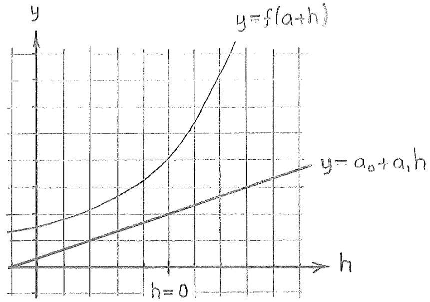
oavsett hur linjen väljs.

Den linjära funktion som approximerar funktionen lokalt måste vara tangentlinjens ekvation, dvs

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

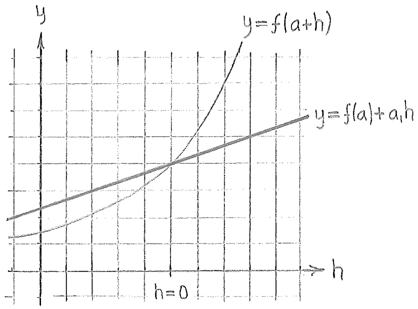


① Antag att vi har en funktion som är differentierbar i $x = a$.



② Då finns konstanter a_0 och a_1 så att

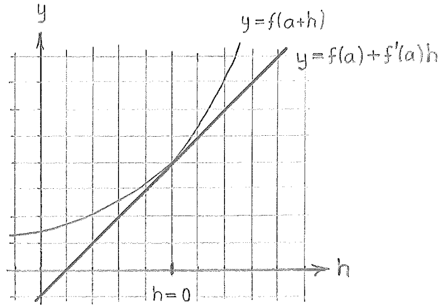
$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + o(h). \quad (*)$$



③ Sätt in $h = 0$ i $(*)$

$$f(a+0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + o(0)$$

vilket ger att $a_0 = f(a)$.

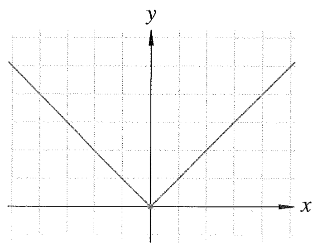


④ Lös ut a_1 ur $(*)$

$$a_1 = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{o(h)}{h}$$

och låt $h \to 0$. Då får vi att $a_1 = f'(a)$.

Exempel 4: Visa att funktionen $f(x) = |x|$ inte är differentierbar i $x = 0$.



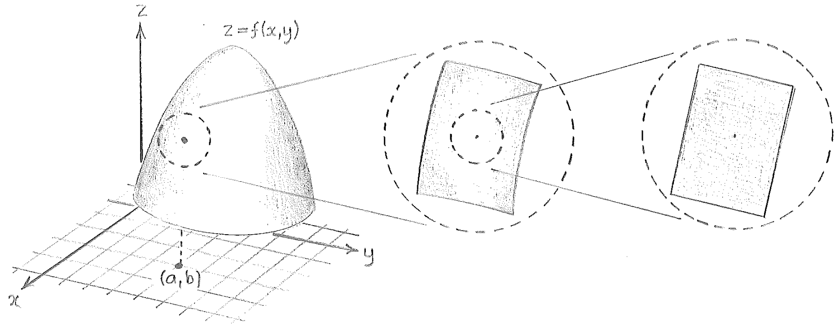
Grafen till $f(x) = |x|$.

Funktioner av två variabler

Funktionen $f(x,y)$ är differentierbar i punkten $(x,y) = (a,b)$ om

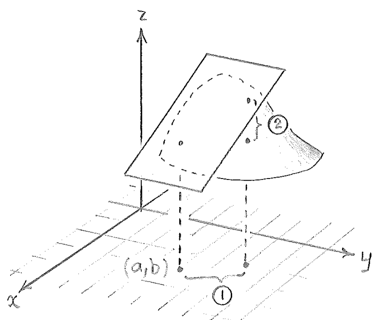
$$f(a+h, b+k) = (\text{linjär funktion i } h \text{ och } k) + o(r)$$

där $r = |(h,k)| = \sqrt{h^2+k^2}$.



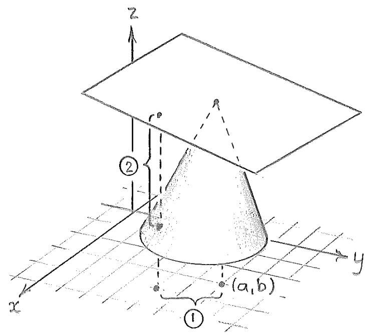
Ju mer vi zoomar in kring $(x,y) = (a,b)$ desto mer liknar en differentierbar funktion en linjär funktion.

Lite löst: funktionsytan är tillplattad i $(x,y) = (a,b)$.



Funktionen är differentierbar i $(x,y) = (a,b)$ eftersom

$② \div ① \to 0$ när $① \to 0$



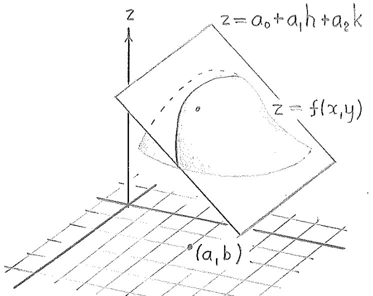
Funktionen är inte differentierbar i $(x,y) = (a,b)$ eftersom

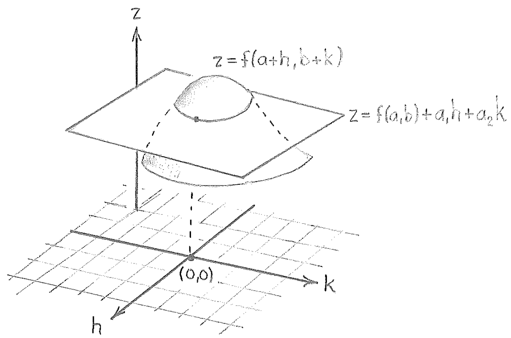
$② \div ① \not\to 0$ när $① \to 0$

oavsett hur planet väljs.

Den linjära funktion som approximerar funktionen lokalt måste vara tangentplanets ekvation, dvs

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + o(r).$$





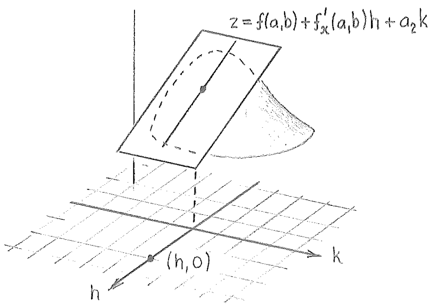
① Funktionen $f(x,y)$ är differentierbar i $(x,y) = (a,b)$, dvs

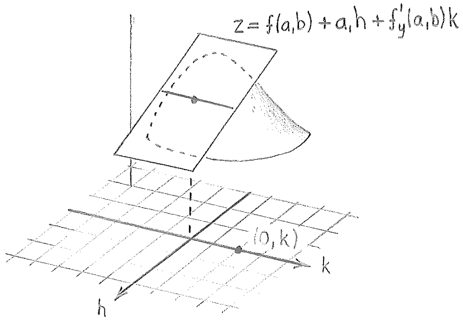
$f(a+h,b+k) = a_0 + a_1h + a_2k + o(r)$. $(*)$

② Sätt in $(h,k) = (0,0)$ i $(*)$

$f(a+0,b+0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + o(0)$

vilket ger att $a_0 = f(a,b)$.





③ Sätt in $k=0$ och lös ut a_1 ur $(*)$

$$a_1 = \frac{f(a+h,b+0) - f(a,b)}{h} + \frac{o(r)}{h}$$

och låt $h \to 0$. Då får vi att $a_1 = f'_x(a,b)$.

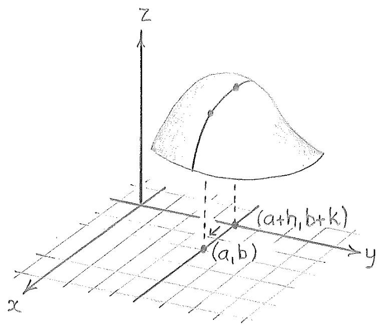
④ Sätt in $h=0$ och lös ut a_2 ur $(*)$

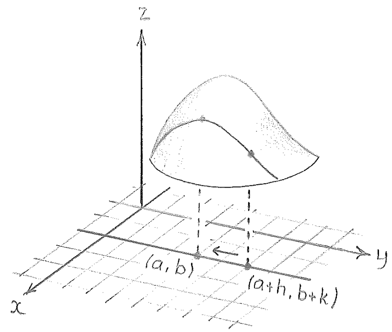
$$a_2 = \frac{f(a+0,b+k) - f(a,b)}{k} + \frac{o(r)}{k}$$

och låt $k \to 0$. Då får vi att $a_2 = f'_y(a,b)$.

Deriverbarhet ≠ Differentierbarhet

Det gäller inte nödvändigtvis att en deriverbar funktion (dvs partialderivatorna existerar) också är differentierbar.





① Om $f'_x(a,b)$ existerar betyder det att

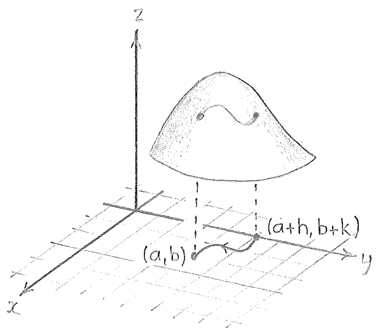
$f(a+h,b+k) = a_0 + a_1h + a_2k + o(r)$

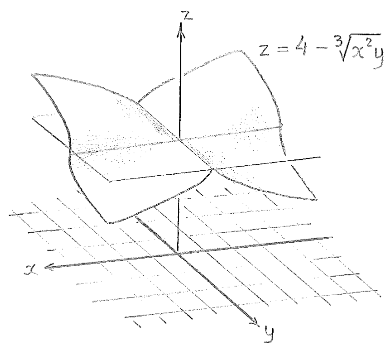
gäller utmed x-riktningen.

② Om $f'_y(a,b)$ existerar betyder det att

$f(a+h,b+k) = a_0 + a_1h + a_2k + o(r)$

gäller utmed y-riktningen.





③ För en differentierbar funktion måste däremot

$f(a+h,b+k) = a_0 + a_1h + a_2k + o(r)$

gälla oavsett hur $(h,k) \to (0,0)$.

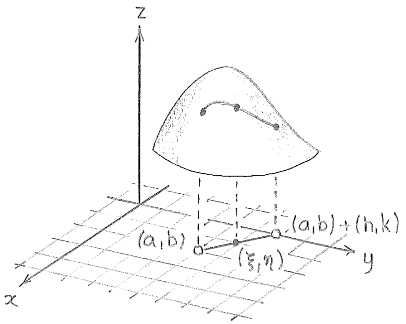
④ Funktionen $f(x,y) = 4 - \sqrt[3]{x^2y}$ är deriverbar i origo men inte differentierbar där.

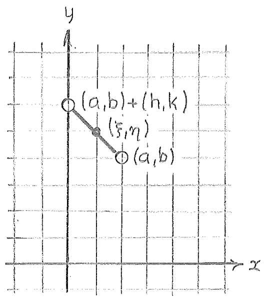
Kontinuerligt deriverbara funktioner

Om $f(x,y)$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $(x,y)=(a,b)$ finns en formel för resttermen

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \boxed{(f'_x(\xi,\eta)-f'_x(a,b))h + (f'_y(\xi,\eta)-f'_y(a,b))k}$$

där (ξ,η) ligger på linjestycket mellan (a,b) och $(a,b)+(h,k)$.





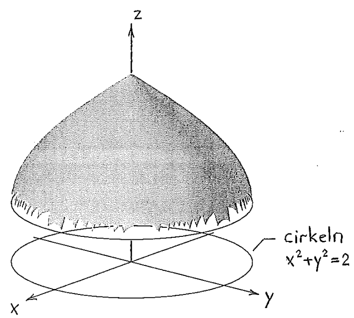
Denna formel ger direkt följande resultat:

> En funktion är differentierbar i en punkt om partialderivatorna är kontinuerliga i en omgivning.

Exempel 6: Bestäm var funktionen

$$f(x,y) = \arcsin(1-x^2-y^2)$$

är differentierbar.



Grafen till $f(x,y) = \arcsin(1-x^2-y^2)$