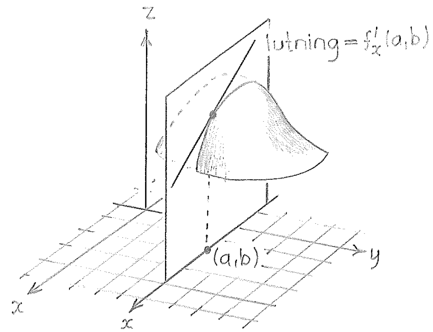
Föreläsning 7

- Riktningsderivata
  - Gradientformeln
  - Skalärprodukt
  - Största och minsta riktningsderivata
- Derivata för vektorvärda funktioner
  - Differentierbara funktioner
  - Jakobian
  - Kedjeregeln
  - Inversfunktioner

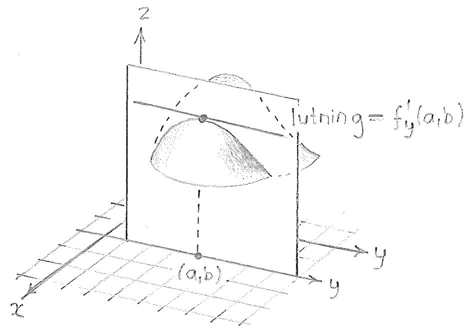
Riktningsderivata

Derivatan av $f(x,y)$ i punkten (a,b) och i enhetsriktningen $\hat{u}=(c,d)$ definieras som

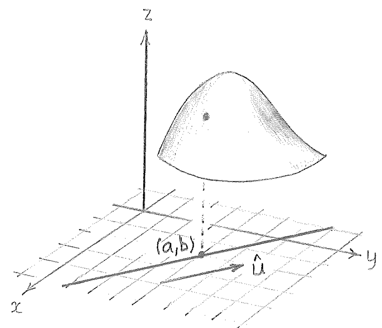
$$f'_{\hat{u}}(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tc, b+td)\Big|_{t=0}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tc, b+td) - f(a,b)}{t}$$



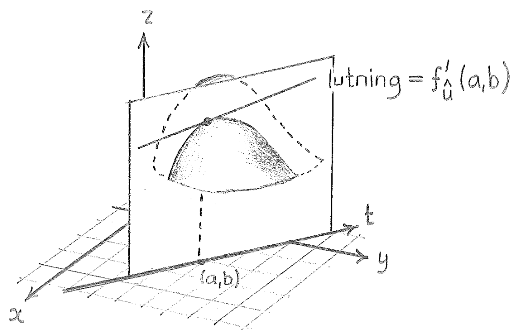
① Partialderivatan $f'_x(a,b)$ anger funktionsytans lutning i x-led i punkten (a,b).



② Partialderivatan $f'_y(a,b)$ anger funktionsytans lutning i y-led i punkten (a,b).



③ Vi undersöker nu funktionen utmed den räta linjen genom (a,b) och med riktning $\hat{u}=(c,d)$.



④ Riktningsderivatan $f'_{\hat{u}}(a,b)$ anger funktionsytans lutning i riktningen $\hat{u}$ i punkten (a,b).

Gradientformeln

Om $f(x,y)$ är differentierbar i (a,b), då är

$$f'_{\hat{u}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \hat{u},$$

där $\nabla f(a,b) = \left(f'_x(a,b),\ f'_y(a,b) \right)$.

Obs! Vektorn $\hat{u}$ ska vara en enhetsvektor.

Exempel 1: Bevisa gradientformeln.

Exempel 2: Beräkna riktningsderivatan av

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

i punkten $(1,2)$ och i riktningen $\bar{v} = (2,1)$

Övning 1: Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y) = xy$ i punkten $(2,-1)$ och i riktningen $\bar{v} = (3,4)$.

Exempel 3: Beräkna riktningsderivatan av

$$f(x,y,z) = x^2 y \ln(y+z)$$

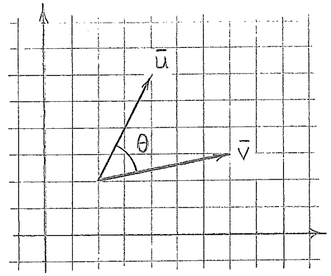
i punkten $(5,2,-1)$ och i riktning mot punkten $(5,-1,3)$.

Skalärprodukten

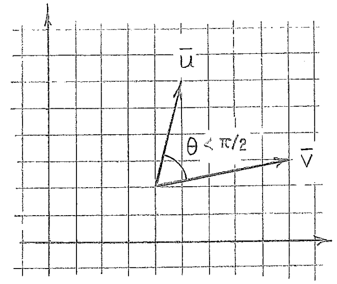
Om vinkeln mellan vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är θ, då definieras

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |u|\,|v| \cos \theta .$$

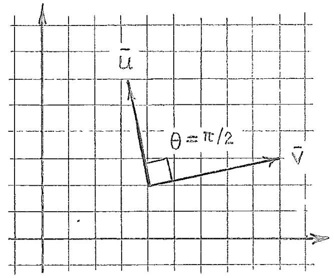
Skalärprodukten är ett mått på hur mycket de två vektorernas riktningar sammanfaller.



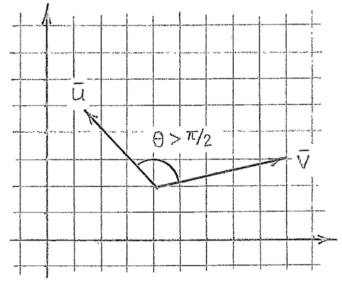
(1) Givet vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ som bildar vinkeln θ mellan sig.



(2) Vi har att $\bar{u} \cdot \bar{v} > 0$ om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ bildar en spetsig vinkel.



(3) Vi har att $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är vinkelräta.

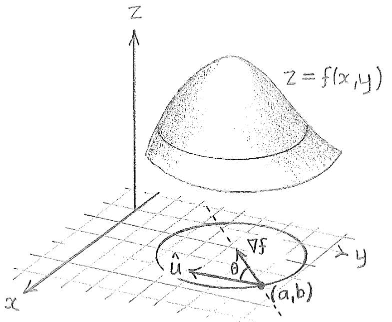


(4) Vi har att $\bar{u} \cdot \bar{v} < 0$ om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ bildar en trubbig vinkel.

Största och minsta riktningsderivata

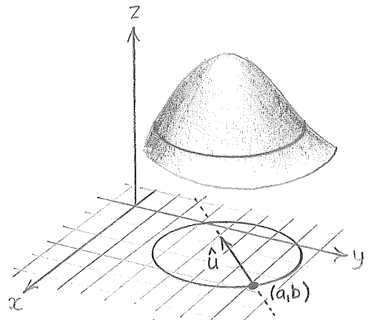
Riktningsderivatan av $f(x,y)$ i punkten (a,b) och i enhetsriktningen $\hat{u}$ är som

- störst när $\hat{u}$ pekar i riktning $\nabla f(a,b)$,
- minst när $\hat{u}$ pekar i riktning $-\nabla f(a,b)$.



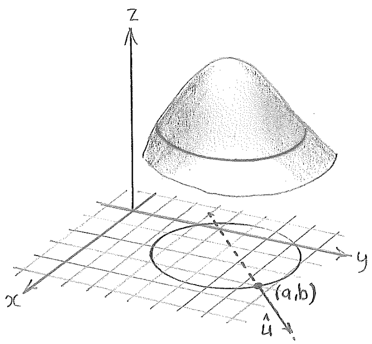
① Riktningsderivatan i en riktning $\hat{u}$ ges av

$$f'_{\hat{u}}(a,b) = |\nabla f(a,b)| \cos\theta$$



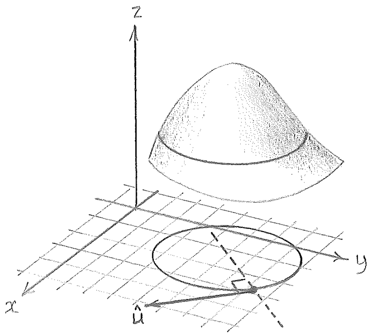
② Genom att välja $\hat{u}$ i samma riktning som $\nabla f(a,b)$ $(\theta = 0)$ får vi störst riktningsderivata

$$f'_{\hat{u}}(a,b) = |\nabla f(a,b)|$$



③ Minst riktningsderivata blir det när $\hat{u}$ pekar i motsatt riktning till $\nabla f(a,b)$ $(\theta = \pi)$

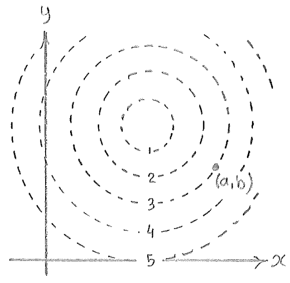
$$f'_{\hat{u}}(a,b) = -|\nabla f(a,b)|.$$

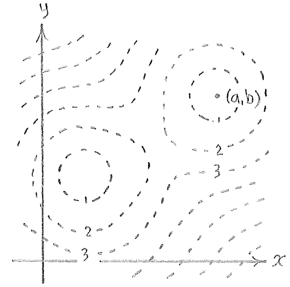


④ Väljer vi $\hat{u}$ vinkelrät mot $\nabla f(a,b)$ $(\theta = \pi/2)$ får vi

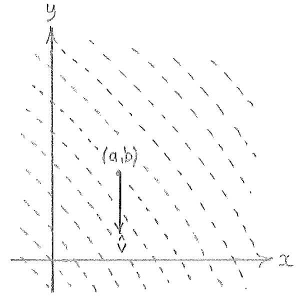
$$f'_{\hat{u}}(a,b) = 0.$$

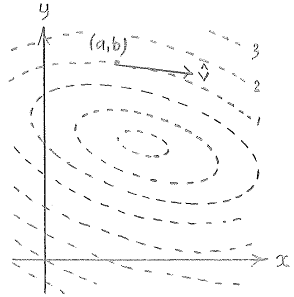
Övning 2: Rita in den riktning ditåt riktningsderivatan av $f(x,y)$ är störst i punkten (a,b).





Övning 3: Ange tecknet på $f'_{\hat{v}}(a,b)$.





Exempel 4: Temperaturen i ett rum ges av

$$T(x,y,z) = xy - x^2 - z^2$$

och du befinner dig i punkten $(1,1,3)$.

a) I vilken riktning ökar temperaturen som mest?

b) Ange en riktning varåt temperaturökningen är noll.

Derivata för vektorvärda funktioner

Differentierbara funktioner

En funktion

$$\bar{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

är differentierbar om komponenterna $u(x,y)$ och $v(x,y)$ är det. Då gäller att

$$\bar{f}(a+h,b+k) = \underbrace{\begin{pmatrix} u(a,b) \\ v(a,b) \end{pmatrix}}_{\text{konstant}} + \underbrace{\begin{pmatrix} u'_x(a,b) & u'_y(a,b) \\ v'_x(a,b) & v'_y(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{\text{linjära termer}} + o(r).$$

$$u(a+h,b+k) = u(a,b) + u'_x(a,b)h + u'_y(a,b)k + o(r)$$

$$v(a+h,b+k) = v(a,b) + v'_x(a,b)h + v'_y(a,b)k + o(r)$$

1. Varje komponent är differentierbar och approximeras lokalt väl av linjära funktioner.

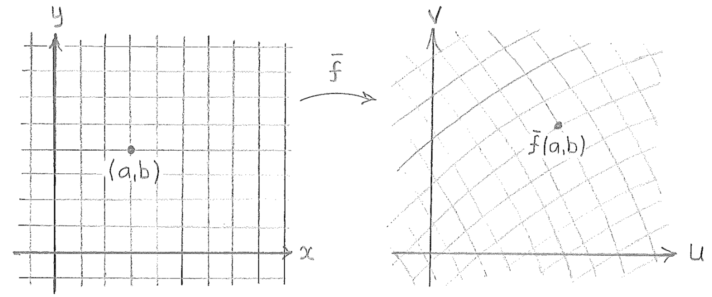
$$\begin{pmatrix} u(a+h,b+k) \\ v(a+h,b+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(a,b) + u'_x(a,b)h + u'_y(a,b)k \\ v(a,b) + v'_x(a,b)h + v'_y(a,b)k \end{pmatrix} + o(r)$$

2. Detta kan skrivas i vektorform,

$$f(a+h,b+k) = \begin{pmatrix} u(a,b) \\ v(a,b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_x(a,b) & u'_y(a,b) \\ v'_x(a,b) & v'_y(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(r)$$

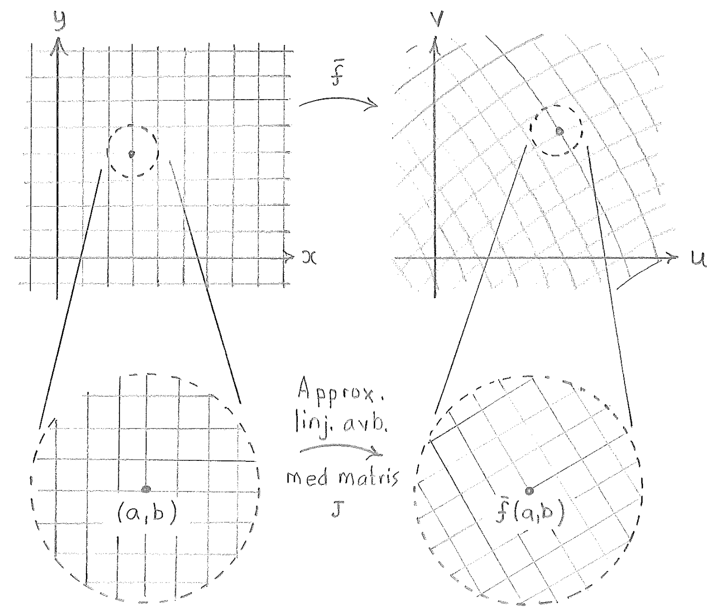
3. eller sammanfattas i matrisform.

Geometriskt betyder detta att en differentierbar funktion



lokalt kring punkten (a,b) ser ut som en linjär avbildning med matrisen

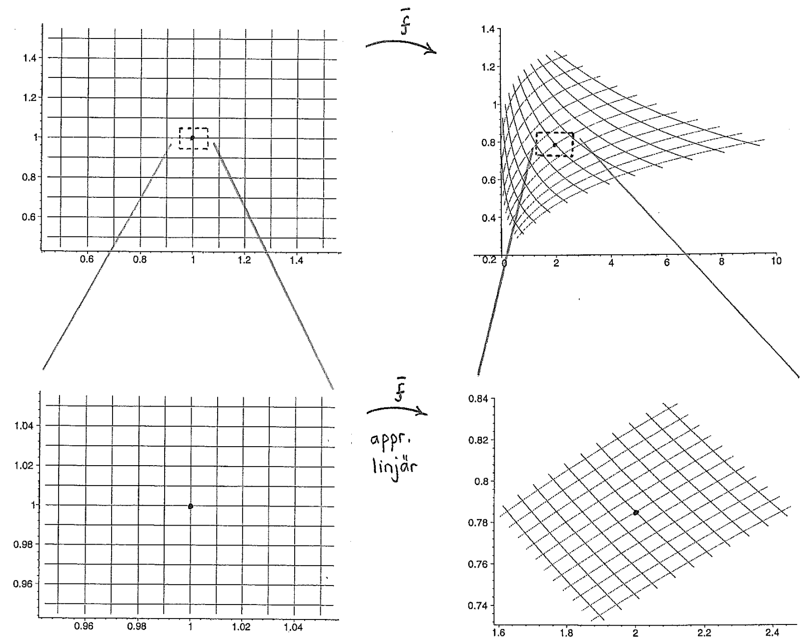
$$J = \begin{pmatrix} u'_x(a,b) & u'_y(a,b) \\ v'_x(a,b) & v'_y(a,b) \end{pmatrix}.$$



Exempel 5: Bestäm den linjära approximationen till

$$\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y - 2xy + 3xy^2 \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

kring punkten $(x,y) = (1,1)$.



Jakobian

För en differentierbar funktion

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

kallas $m \times n$-matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

för jakobianen till f och betecknas

$$J_f, \quad \frac{\partial f}{\partial(x_1,\dots,x_n)} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}.$$

Övning 4: Bestäm jakobianen till

$$f: \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s^2 - t^2 \\ st \end{pmatrix}.$$

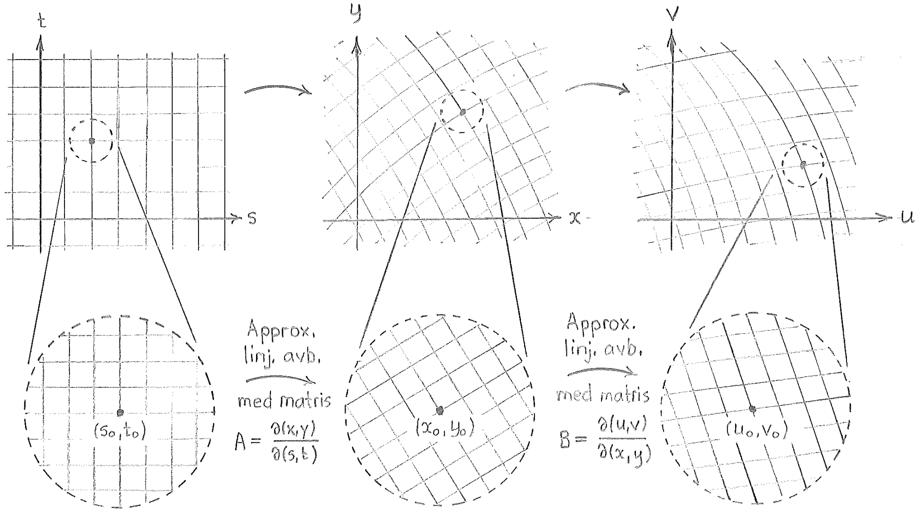
Kedjeregeln för vektorvärda funktioner

Betrakta sammansättningen

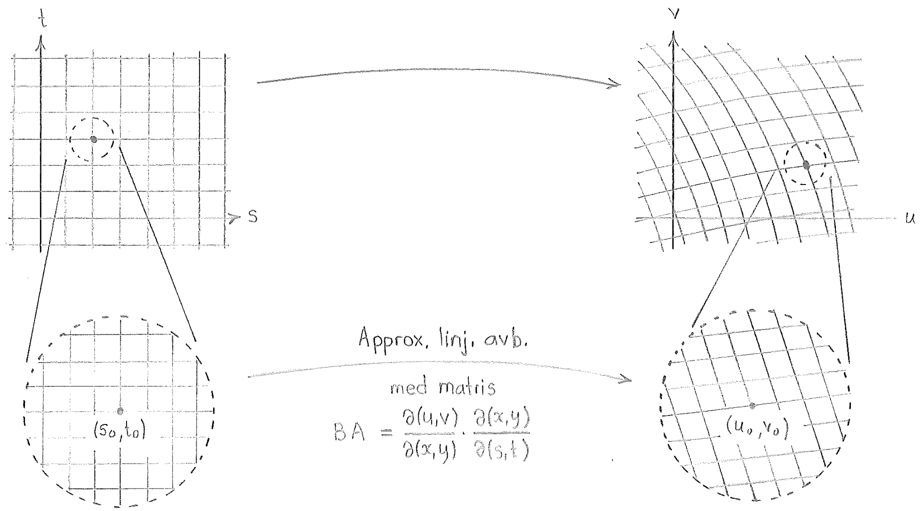
$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}.$$

Om $(x(s,t), y(s,t))$ och $(u(x,y), v(x,y))$ är differentierbara funktioner, då är

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \overbrace{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}^{\text{yttre derivata}} \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}}_{\text{inre derivata}}.$$



(1) Lokalt kring (s_0,t_0) approximeras avbilning $(s,t) \mapsto (x,y)$ väl av en linjär avbildning med matrisen $A = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\Big|_{\substack{s=s_0 \\ t=t_0}}$ och avbildningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ approximeras väl kring (x_0,y_0) av en linjär avbildning med matrisen $B = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$.



(2) Därmed kommer den sammansatta avbildningen $(s,t) \mapsto (x,y) \mapsto (u,v)$ lokalt kring (s_0,t_0) approximeras väl av den linjära avbildning som är sammansättning av delavbildningarnas linjära avbildningar och därmed ha matrisen

$$B \cdot A = \left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \cdot \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|_{\substack{s=s_0\\ t=t_0}}.$$

Övning 5: Bestäm jakobianen för

$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{xy} \\ xy \sin x \end{pmatrix}.$$

Exempel 6: Bestäm jakobianen för

$$\bar{f}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{xy} \\ xy \sin x \end{pmatrix}$$

genom att dela upp $\bar{f}$ i två enkla steg och använda kedjeregeln.

Övning 6: Låt $\bar{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$ och $\bar{g} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x^2-y^2 \\ x^2+2y^2 \end{pmatrix}$.

Då är

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 4x & -2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}.$$

Bestäm jakobianen för

a) $\bar{f} \circ \bar{g}$ i punkten $(1,1)$

b) $\bar{g} \circ \bar{f}$ i punkten $(1,1)$

c) $\bar{f} \circ \bar{g} \circ \bar{f}$ i punkten $(1,1)$

Allmänna kedjeregeln

För en allmän sammansättning

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_p \end{pmatrix}$$

gäller att

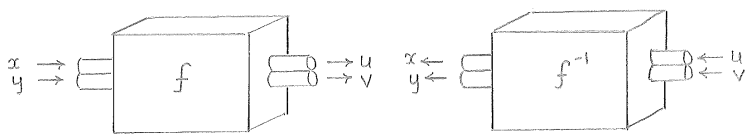
yttre derivata

$$\frac{\partial(z_1,\ldots,z_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)} = \frac{\partial(z_1,\ldots,z_p)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \, \frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}.$$

inre derivata

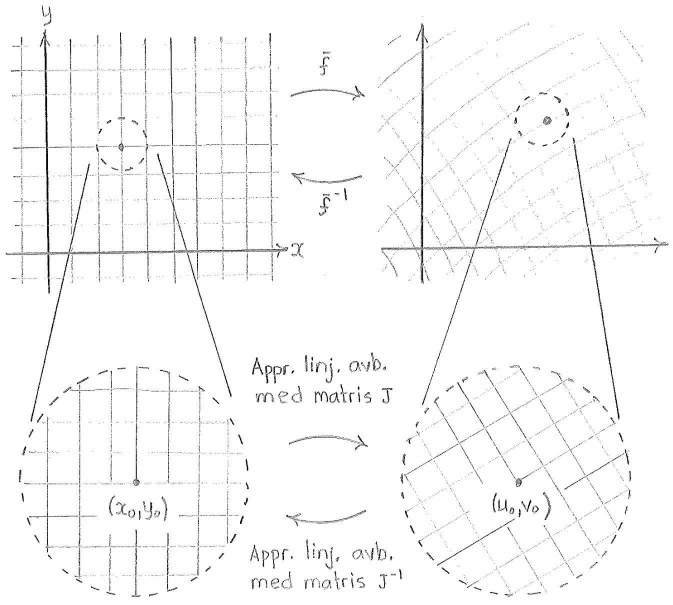
Inversfunktionens jakobian

Inversfunktionen f^{-1} avbildar utvärden till f tillbaka till motsvarande invärden.



Inversfunktionen f^{-1} har en jakobian som är inversen av f:s jakobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}.$$



Exempel 7: Funktionen

$$\bar{f}: \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

avbildar $(x,y) = (1,1)$ till $(u,v) = (0,2)$ och har en inversfunktion i en omgivning av $(u,v) = (0,2)$. Bestäm

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(0,2).$$