Föreläsning 8

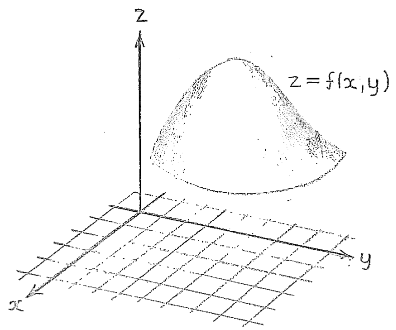
- Nivåkurvor
  - Normalvektor
  - Singulära punkter
- Nivåytor
  - Normalvektor
  - Normal till funktionsyta
  - Singulära punkter

Nivåkurvor

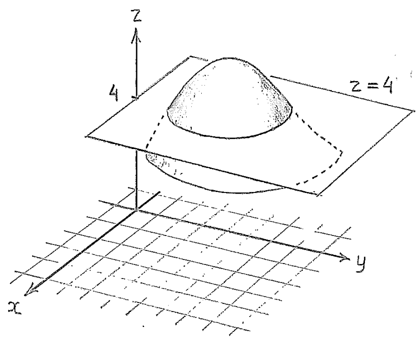
En nivåkurva till en reellvärd funktion $f(x,y)$ är en kurva i x,y-planet där f är konstant,

$$f(x,y) = C$$

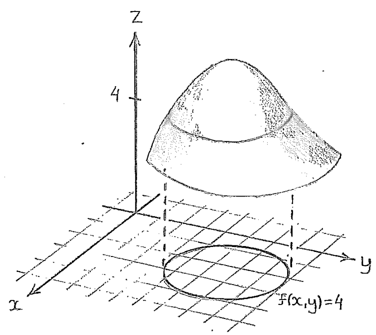
för ett fixt värde på C.



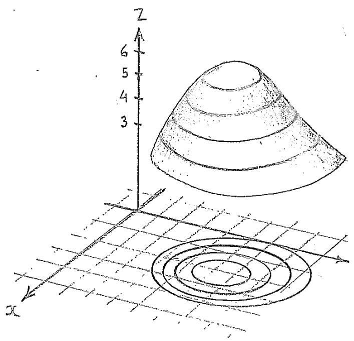
① Vi har en reellvärd funktion och ritar upp dess funktionsyta $z = f(x,y)$.



② Välj $z = 4$ och betrakt skärningskurvan mellan planet $z = 4$ och funktionsytan.



③ Kurvan nedprojicerad på x,y-planet ger nivåkurvan $f(x,y) = 4$.

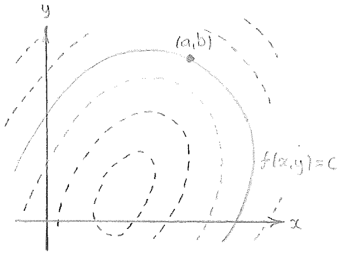


④ Genom att välja olika nivåer på planet $z = C$ får vi olika nivåkurvor $f(x,y) = C$.

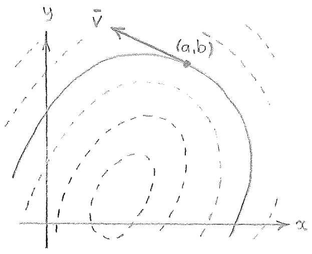
Normalvektor

En nivåkurva $f(x,y)=C$ har i en punkt (a,b) på kurvan normalvektorn

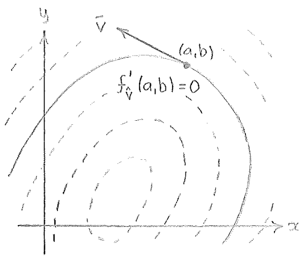
$$\bar{n} = \nabla f(a,b).$$



① Tag en punkt (a,b) på nivåkurvan $f(x,y)=C$



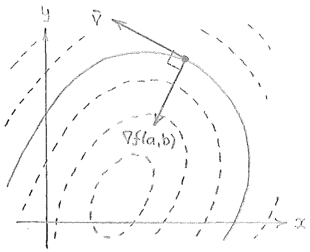
② Betrakta en riktning $\bar{v}$ parallell med nivåkurvan i punkten (a,b).



③ Då $\bar{v}$ pekar i nivåkurvans riktning är

$$f'_{\hat{v}}(a,b) = 0$$

eftersom funktionen inte ändrar sitt värde utmed nivåkurvan.



④ Gradientformeln

$$f'_{\hat{v}}(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot \hat{v} = 0$$

ger att $\nabla f(a,b)$ är vinkelrät mot $\bar{v}$, dvs $\nabla f(a,b)$ är vinkelrät mot nivåkurvan i (a,b).

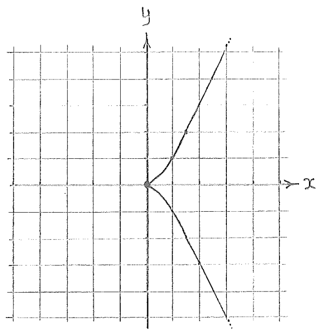
Exempel 1: Låt $f(x,y) = x^2y + xy^3 - x + 1$. Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan för f genom punkten $(1,1)$.

Singulära punkter

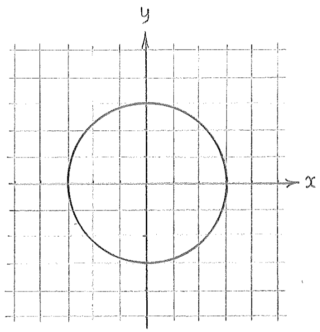
Om en nivåkurva $f(x,y)=0$ har en punkt (x_0,y_0) där

$$\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$$

då kallas (x_0,y_0) för en singulär punkt. I en sådan punkt kan kurvan tvärt byta riktning.



Nivåkurvan $x^3-y^2=0$ har en singulär punkt i origo och byter där tvärt riktning.



Nivåkurvan $(x^2+y^2-9)^2=0$ har singulära punkter på hela cirkeln utan att tvärt byta riktning i någon punkt.

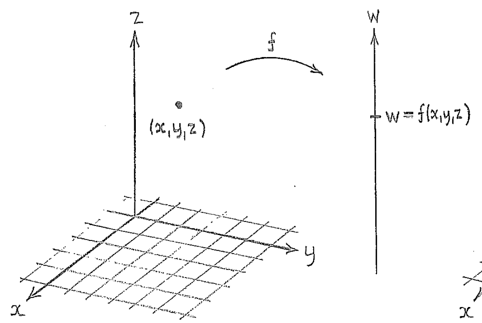
Övning 1: Bestäm alla singulära punkter till nivåkurvan $y^3+2x-x^2=1$.

Nivåytor

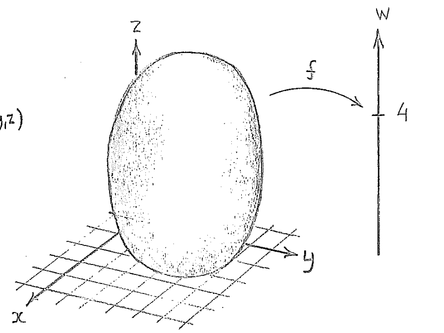
En nivåyta till en reellvärd funktion $f(x,y,z)$ är en yta i rummet där f är konstant,

$$f(x,y,z) = C$$

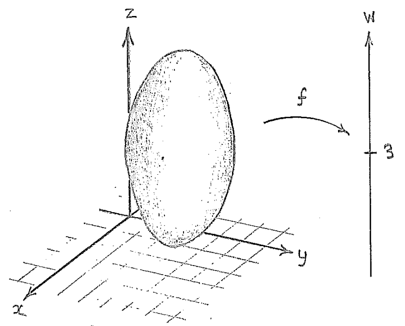
för ett fixt värde på C.



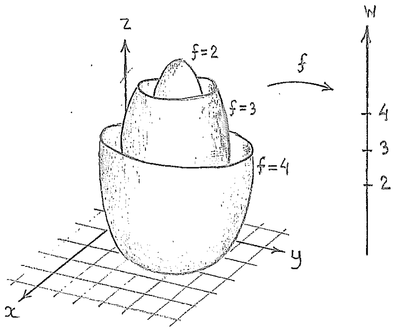
① Betrakta en reellvärd funktion f som avbildar punkter (x,y,z) på värden w.



② Fixera $w=4$. Alla punkter (x,y,z) som avbildas på $w=4$ bildar nivåytan $f(x,y,z)=4$.



③ Väljer vi en annan nivå $w=3$. Vi får då på samma sätt nivåytan $f(x,y,z)=3$.

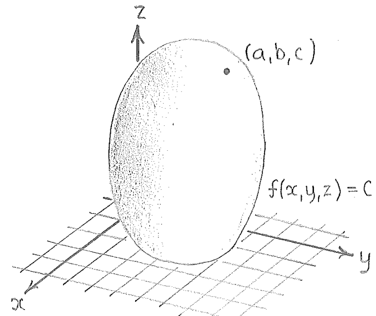


④ Genom att välja olika nivåer $w=C$ får vi olika nivåytor $f(x,y,z)=C$.

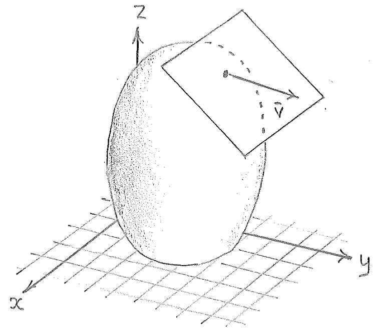
Normal till nivåyta

En nivåyta $f(x,y,z)=C$ har i en punkt (a,b,c) på ytan normalvektorn

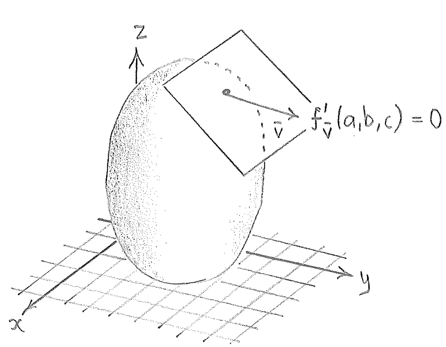
$$\bar{n} = \nabla f(a,b,c).$$



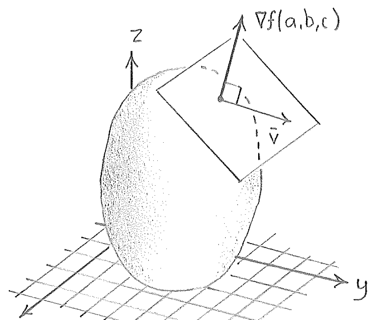
① Tag en punkt (a,b,c) på nivåytan $f(x,y,z)=C$.



② Betrakta en riktning $\bar{v}$ parallell med tangentplanet till nivåytan i punkten (a,b,c).



③ Då är $f'_{\bar{v}}(a,b,c) = 0$ eftersom $\bar{v}$ pekar parallellt med nivåytan.



③ Gradientformeln

$$f'_{v}(a,b,c) = \nabla f(a,b,c) \cdot \bar{v} = 0$$

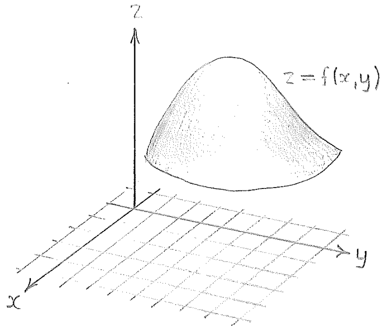
visar att ∇f är vinkelrät mot $\bar{v}$, och mot alla $\bar{v}$ parallella med tangentplanet.

Exempel 2: Visa att planet $2x+2y-3z=2$ tangerar ytan $2x^2+2y^2-3z^2=4$.

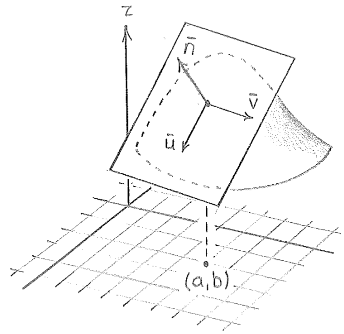
Normal till funktionsyta

En normal $\bar{n}$ till tangentplanet för en funktionsyta $z=f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$ ges av

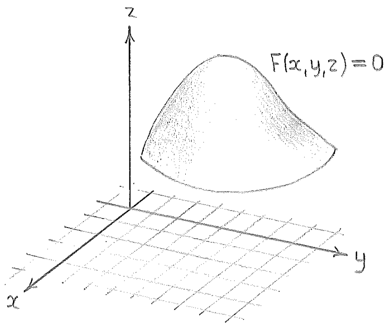
$$\bar{n} = \left(-f'_x(a,b), -f'_y(a,b), 1\right).$$



① Antag att vi har en funktionsyta $z=f(x,y)$.



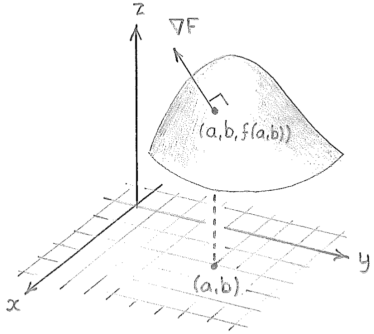
② Tidigare har vi sett att $\bar{n} = \bar{u}\times\bar{v} = (1,0,f'_x)\times(0,1,f'_y)$ är en normal till ytan.



③ Inför funktionen

$$F(x,y,z) = z - f(x,y).$$

Då är funktionsytan 0-nivåytan till F.



④ En normal till ytan är

$$\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (-f'_x, -f'_y, 1).$$

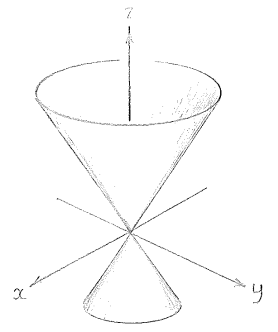
Exempel 3: Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,1,2)$ där $f(x,y) = x^2y + xy^3 - x + 1$.

Singulära punkter

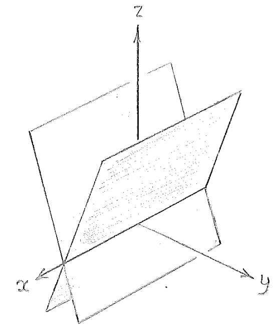
Om en nivåyta $f(x,y,z) = 0$ har en punkt (x_0, y_0, z_0) där

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$$

då kallas (x_0, y_0, z_0) för en singulär punkt. I en sådan punkt kan ytan ha en spets eller kant.



Ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ har en singulär punkt i origo.



Ytan $9y^2 - z^2 = 0$ har singulära punkter längs x-axeln.