Föreläsning 9

- Implicita funktioner
  - Samband mellan två variabler
  - Samband mellan tre variabler
- Lösningar till linjära ekvationssystem
  - Kvadratiska system
  - Liggande system
- Implicita funktionssatsen

Implicita funktioner

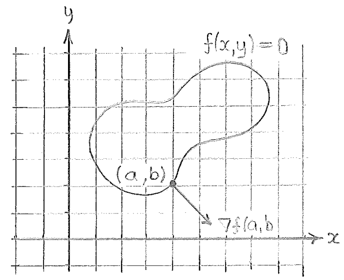
Samband mellan två variabler

Om $f(x,y)$ är kontinuerligt deriverbar, då definierar nivåkurvan/ekvationen

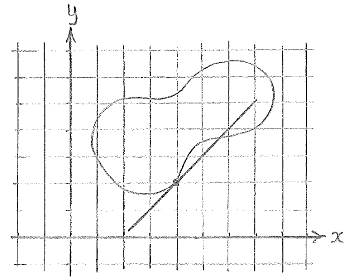
$$f(x,y) = 0$$

y som en kontinuerligt deriverbar funktion av x lokalt kring $(x,y) = (a,b)$ om

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

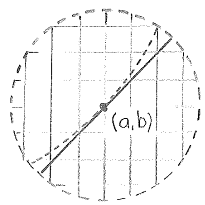


(1) Nivåkurvan $f(x,y) = 0$ har normalvektorn $\nabla f(a,b)$ i punkten (a,b).

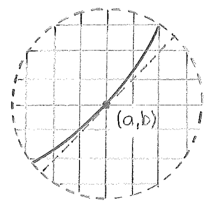


(2) Tangentlinjen till nivåkurvan i (a,b) ges av

$$\nabla f(a,b) \cdot ((x,y) - (a,b)) = 0$$
$$\Leftrightarrow f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = 0$$

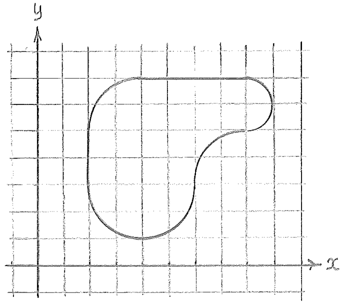


(3) Om $f'_y(a,b) \neq 0$ kan y lösas ut som en funktion av x ur tangentlinjens ekvation.

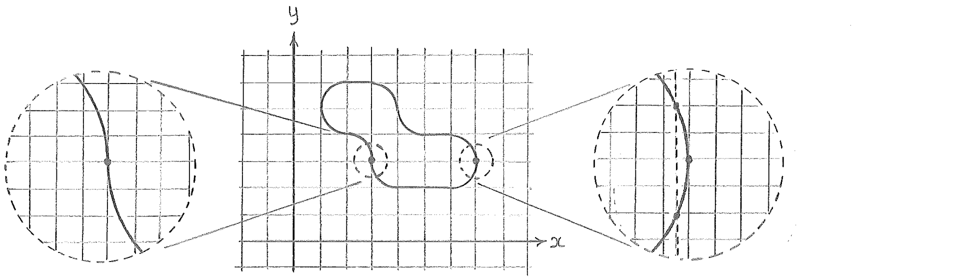


(4) Lokalt kring (a,b) definierar nivåkurvan y som en funktion av x samtidigt som tangentlinjen gör det.

Övning 1: Markera de punkter där nivåkurvan till höger inte definierar $y = y(x)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion.



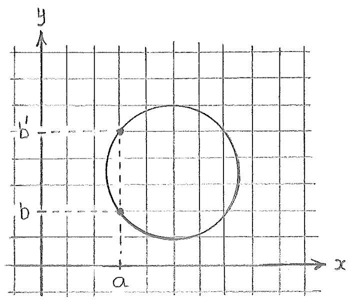
Om $f'_y(a,b) = 0$ då definierar inte $f(x,y) = 0$ lokalt kring (a,b) $y = y(x)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion.



Lokalt kring punkten definierar nivåkurvan y som en funktion av x men ej som en kont. deriverbar funktion (lodrät tangent).

Oavsett hur liten omgivningen väljs finns det två y-värden som svarar mot varje x-värde till vänster om punkten.

Notera att funktionen $y = y(x)$ bara är garanterad att finnas i en omgivning av (a,b) och inte överallt.



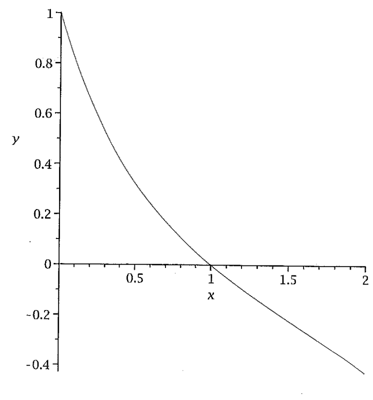
Mot $x = a$ svarar två y-värden $y = b$ och $y = b'$ på nivåkurvan.

Övning 2: Undersök om ekvationen

$$e^{xy} + x + y = 2$$

i en omgivning av punkten $(1,0)$ definierar en kontinuerligt deriverbar funktion $y = y(x)$.

Exempel 1: Bestäm $y'(1)$ för funktionen ovan.



Kurvan $e^{xy} + x + y = 1$.

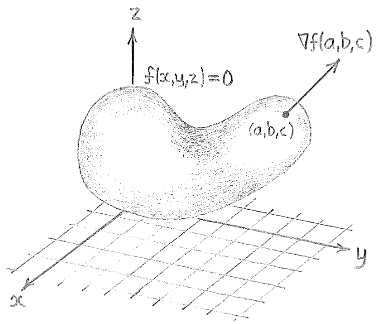
Samband mellan tre variabler

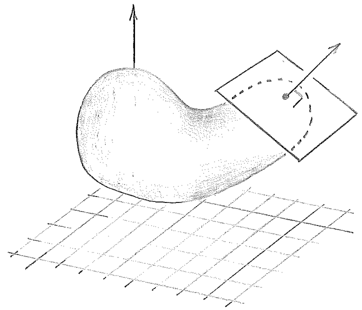
Om $f(x,y,z)$ är kontinuerligt deriverbar, då definierar nivåytan/ekvationen

$$f(x,y,z) = 0$$

z som en kontinuerligt deriverbar funktion av x och y lokalt kring $(x,y,z) = (a,b,c)$ om

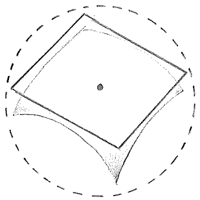
$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0.$$

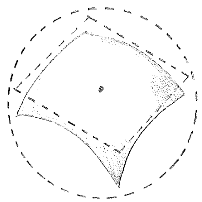




① Nivåytan $f(x,y,z) = 0$ har normalvektorn $\nabla f(a,b,c)$ i punkten (a,b,c).

② Tangentplanet i (a,b,c) ges av
$$\nabla f(a,b,c)\cdot((x,y,z)-(a,b,c)) = 0$$
$$f'_x(a,b,c)(x-a)+f'_y(a,b,c)(y-c)+f'_z(a,b,c)(z-c)=0$$





③ Om $f'_z(a,b,c) \neq 0$ kan z lösas ut som en funktion av x och y ur tangentplanets ekvation.

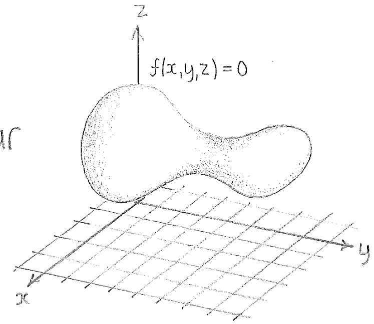
④ Lokalt kring (a,b,c) definierar nivåytan z som en funktion av x och y samtidigt som tangentplanet gör det.

Övning 3: Hur lyder villkoret för att

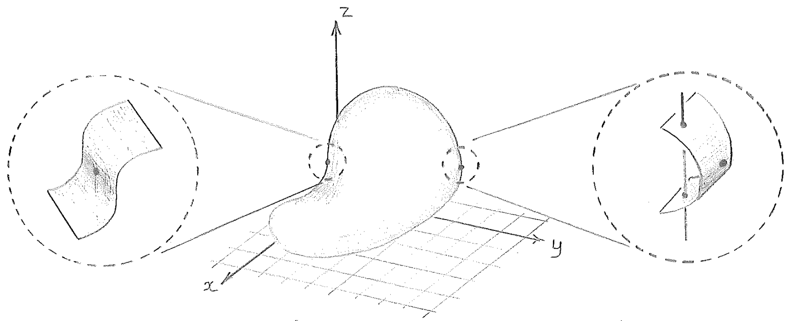
$$f(x,y,z) = 0$$

ska definiera en kontinuerligt deriverbar funktion $x = x(y,z)$ i en omgivning av $(x,y,z) = (a,b,c)$.

Övning 4: Markera de punkter där nivåytan till höger inte definierar $y = y(x,z)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion.



Om $f'_z(a,b,c) = 0$ då definierar inte $f(x,y,z) = 0$ lokalt kring (a,b,c) $z = z(x,y)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion.



Lokalt kring punkten definierar nivåytan z som en funktion av (x,y) men ej som en kont. deriverbar funktion (lodrät tangentplan).

Oavsett hur liten omgivningen väljs finns det två z-värden som svarar mot varje (x,y)-värde till vänster om punkten.

Exempel 2: Visa att sambandet $3xyz - z^3 = 0$ definierar $z = z(x, y)$ som en kontinuerligt deriverbar funktion kring $(x, y, z) = (1, 3, 2)$. Bestäm $z'_x(1,3)$ och $z'_y(1,3)$.

Lösningar till linjära ekvationssystem

Kvadratiska system

Vad krävs för att ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem har exakt en lösning?

Svaret är att ett allmänt kvadratiskt system

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

har exakt en lösning om och endast om

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Övning 5: Avgör om systemet har exakt en lösning.

$$\begin{cases} x + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

Liggande system

Det linjära ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{|l|c|l|l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m & + & b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n & = c_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m & + & b_{21}y_1 + \cdots + b_{2n}y_n & = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m & + & b_{m1}y_1 + \cdots + b_{mn}y_n & = c_n \end{array} \right.$$

där $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ är obekanta, har en parameterlösning med $t_1 = y_1, \ldots, t_n = y_n$ som parametrar om och endast om

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Övning 6: Ange ett villkor för om systemet

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2u - 5v + 3w = 0 \\ -x + 3y + z - u + 3v + w = 0 \\ 2x - y + 2z + v + 2w = 0 \end{cases}$$

har en parameterlösning där $t_1 = y$, $t_2 = u$ och $t_3 = v$ är parametrar.

Implicita funktionssatsen

Två samband mellan tre variabler

Om vi har sambanden

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

där f och g är kontinuerligt deriverbara.
Då definierar sambanden x och y som kontinuerligt deriverbara funktioner av z lokalt kring en punkt $(x,y,z)=(a,b,c)$, som uppfyller $(*)$, om

$$\det\left[\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(a,b,c)\right] \neq 0.$$

$$\begin{cases} f(a,b,c) + f'_x(a,b,c)h + f'_y(a,b,c)k + f'_z(a,b,c)\ell + \text{R.T.} = 0 \\ g(a,b,c) + g'_x(a,b,c)h + g'_y(a,b,c)k + g'_z(a,b,c)\ell + \text{R.T.} = 0 \end{cases}$$

1. Linjarisera f och g kring $(x,y,z)=(a,b,c)$ där $h=x-a$, $k=y-b$ och $\ell=z-c$.

$$\begin{vmatrix} f'_x(a,b,c) & f'_y(a,b,c) \\ g'_x(a,b,c) & g'_y(a,b,c) \end{vmatrix} \neq 0$$

2. I närheten av (a,b,c) är resttermen tillräckligt liten och systemet $(*)$ har en parameterlösning med $t=z$ som parameter samtidigt som det linjariserade systemet med försummad restterm, dvs ovanstående determinantvillkor.

Exempel 3: Visa att sambanden

$$\begin{cases} 2e^x - e^y - e^z = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

definierar kontinuerligt deriverbara funktioner $x=x(z)$ och $y=y(z)$ kring punkten $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Allmänna fallet

Om vi har sambanden

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

där $f_1,\dots,f_m$ är kontinuerligt deriverbara.

Då definierar sambanden $(x_1,\dots,x_m)$ som kontinuerligt deriverbara funktioner av $(y_1,\dots,y_n)$ lokalt kring en punkt $(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) = (a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n)$, som uppfyller $(*)$, om

$$\det\left[\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}(a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n)\right] \neq 0.$$