Föreläsning 10

- Kvadratiska former
  - Kvadratkomplettering
  - Kvadratiska formers tecken
- Kvadratisk approximation
  - Funktioner av en variabel
  - Funktioner av två variabler
- Taylors formel av ordning 2
  - Funktioner av en variabel
  - Funktioner av två variabler
  - 2 ggr kont. deriverbara funktioner
  - Taylors formel i matrisform

Kvadratiska former

En kvadratisk form är ett andragradsuttryck som bara innehåller termer av grad 2.

Kvadratkomplettering

En kvadratisk form kan skrivas som en summa av kvadrater med kvadratkomplettering.

$$x^2+10y^2+6z^2+6xy+14yz$$

① Vi ska omforma ovanstående kvadratiska form.

$$\underline{x^2+6xy}+10y^2+14yz+6z^2$$

② Samla alla termer som innehåller x.

$$\underline{(x+3y)^2-(3y)^2}+10y^2+14yz+6z^2$$

③ Kvadratkomplettera dessa termer med avseende på x.

$$(x+3y)^2+\underline{y^2+14yz}+6z^2$$

④ Förenkla och samla återstående termer som innehåller y.

$$(x+3y)^2+\underline{(y+7z)^2-(7z)^2}+6z^2$$

⑤ Kvadratkomplettera dessa termer med avseende på y.

$$(x+3y)^2+(y+7z)^2-43z^2$$

⑥ Förenkla och kvadratkompletteringen är klar.

Övning 1: Kvadratkomplettera uttrycken med avseende på x.

a) x^2+6x+4

b) $x^2+2xy+2y^2$

c) $x^2+4xy-6xz$

Exempel 1: Kvadratkomplettera

$$2x^2-2xy+2y^2-2yz+z^2.$$

Kvadratiska formers tecken

En kvadratisk form i variablerna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sägs vara

- **Positivt definit**
  Om den antar positiva värden för $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

- **Positivt semidefinit**
  Om den antar både positiva värden och värdet 0 för $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

- **Indefinit**
  Om den antar både positiva och negativa värden för $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

- **Negativt semidefinit**
  Om den antar både negativa värden och värdet 0 för $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

- **Negativt definit**
  Om den antar negativa värden för $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Övning 2: Bestäm teckentypen av följande kvadratiska former i x, y och z.

a) $x^2 + y^2 - z^2$

b) $x^2 - y^2$

c) $x^2 + 2y^2 + 3z^2$

d) $x^2 + z^2$

e) $-x^2 - y^2 - 5z^2$

Omskrivning med kvadratkomplettering

Ett sätt att undersöka vilket tecken en kvadratisk form har är att skriva om den med kvadratkomplettering.

Exempel 2: Undersök vilket tecken som $7x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 8xz - 16yz$ har.

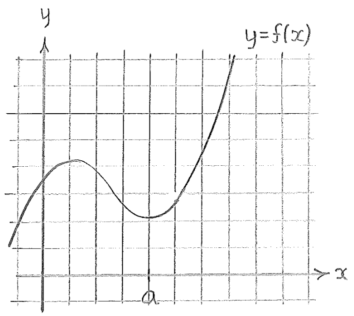
Kvadratisk approximation

Lokalt kring en punkt kan många funktioner approximeras med polynom av grad 2.

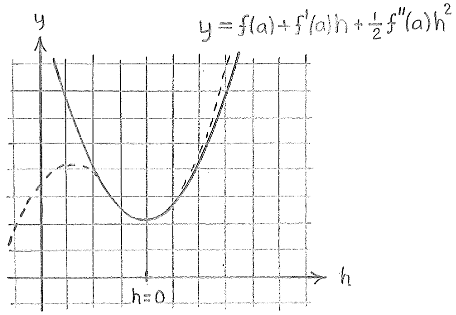
Funktioner av en variabel

En funktion $f(x)$ approximeras kvadratiskt kring $x=a$ med dess taylorpolynom av grad 2

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2.$$



① Funktionen $f(x)$.

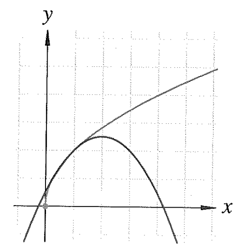


② Lokalt kring $x=a$ approximeras f med sitt taylorpolynom av grad 2.

Felet i denna approximation studeras i nästa avsnitt.

Övning 3: Bestäm den kvadratiska approximationen i $x=1$ av $f(x)=2\sqrt{x}$.

Övning 4: Använd övningen ovan för att bestämma ett approximativt värde av $f(1,01)$.

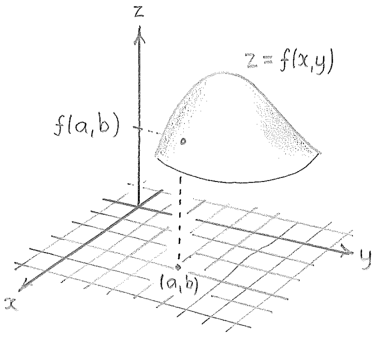


Grafen till $f(x)=2\sqrt{x}$ och dess kvadratiska approximation i $x=1$.

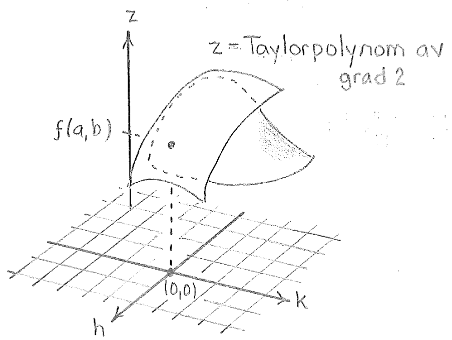
Funktioner av två variabler

En funktion $f(x,y)$ approximeras kvadratiskt kring $(x,y)=(a,b)$ med dess taylorpolynom av grad 2,

$$f(a+h,b+k) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$$
$$+ \tfrac{1}{2} f''_{xx}(a,b)h^2 + \tfrac{1}{2}\left(f''_{xy}(a,b)+f''_{yx}(a,b)\right)hk + \tfrac{1}{2} f''_{yy}(a,b)k^2.$$

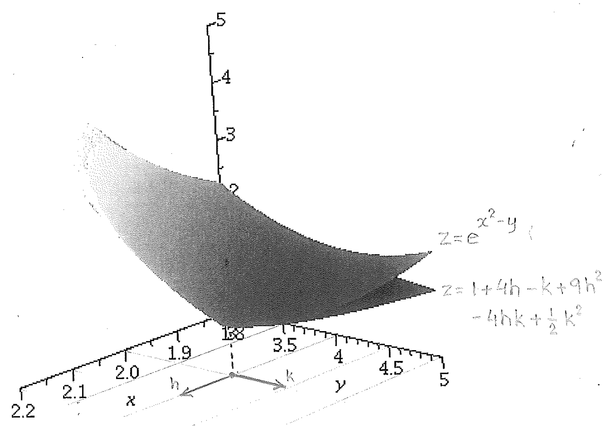


① Funktionen $f(x,y)$



② Lokalt kring $(x,y)=(a,b)$ approximeras f med sitt taylorpolynom av grad 2.

Exempel 3: Bestäm den kvadratiska approximationen i $(x,y)=(2,4)$ av $f(x,y)=e^{x^2-y}$.



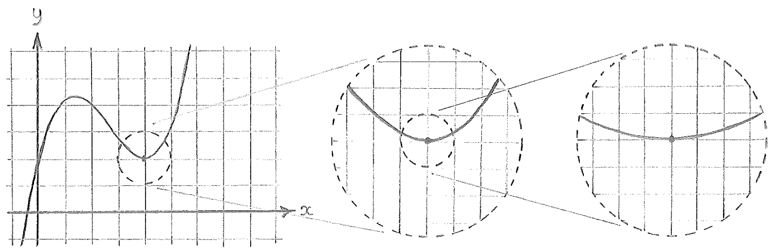
Taylors formel av ordning 2

Två gånger differentierbara funktioner approximeras väl av kvadratiska funktioner.

Funktioner av en variabel

Funktionen $f(x)$ är två gånger differentierbar i $x=a$ om $f(x)$ och $f'(x)$ är differentierbara. Då är

$$f(a+h) = (\text{kvadratisk funktion i } h) + o(h^2).$$



Ju mer vi zoomar in kring $x=a$ desto mer liknar en två gånger differentierbar funktion en kvadratisk funktion.

Notera att funktionen i första hand liknar en linjär funktion

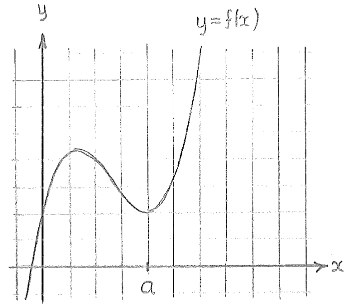
$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + o(h)$$

men huvudbidraget till resttermen $o(h)$ ges av den kvadratiska termen i approximationen

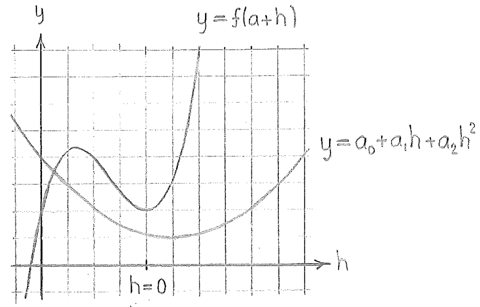
$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \underbrace{a_2 h^2 + o(h^2)}_{=\,o(h)}.$$

Den kvadratiska funktionen som approximerar funktionen lokalt måste vara Taylorpolynomet av ordning 2, dvs

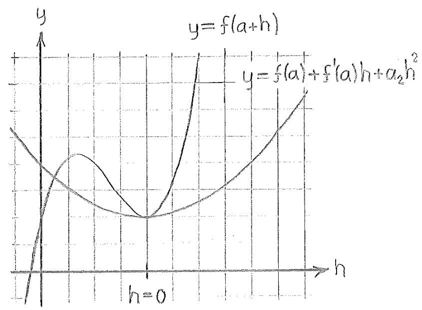
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2).$$



1. Antag att vi har en 2ggr differentierbar funktion $f(x)$ kring punkten $x=a$.

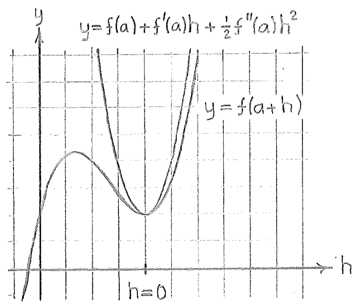


2. Då finns konstanter a_0, a_1 och a_2 så att $f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + o(h^2)$.



3. Från linjäriseringsformeln vet vi att $a_0 = f(a)$ och $a_1 = f'(a)$, dvs

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + a_2 h^2 + o(h^2). \quad (*)$$



4. Lös ut a_2 ur $(*)$ och låt $h \to 0$,

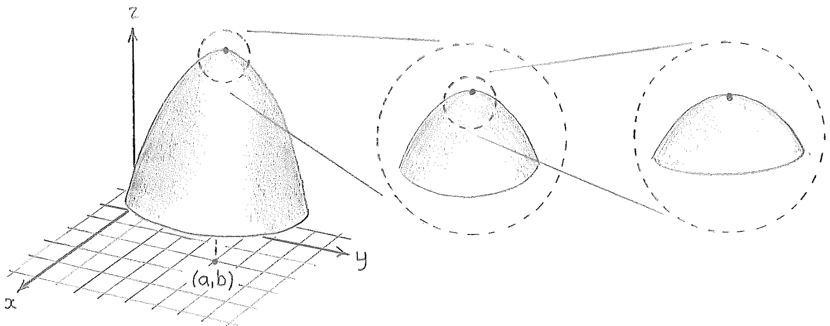
$$a_2 = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h^2} + \frac{o(h^2)}{h^2}$$
$$= \{\text{l'Hospitals regel}\}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} = \tfrac{1}{2}f''(a).$$

Funktioner av två variabler

Funktionen $f(x,y)$ är två gånger differentierbar i punkten (a,b) om $f(x,y)$, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ är det. Då är

$$f(a+h,b+k) = (\text{kvadratisk funktion i } h,k) + o(r^2)$$

där $r = |(h,k)| = \sqrt{h^2+k^2}$.



Ju mer vi zoomar in kring $(x,y)=(a,b)$ desto mer liknar en 2 ggr differentierbar funktion en kvadratisk funktion.

Notera att funktionen i första hand liknar en linjär funktion

$$f(a+h,b+k) = a_0 + a_1 h + a_2 k + o(r)$$

men huvudbidraget till resttermen $o(r)$ ges av de kvadratiska termerna i approximationen

$$f(a+h,b+k) = a_0 + a_1 h + a_2 k + \underbrace{a_3 h^2 + a_4 hk + a_5 k^2 + o(r^2)}_{=o(r)}.$$

Den kvadratiska funktionen

$$f(a+h,b+k) = a_0 + a_1 h + a_2 k + a_3 h^2 + a_4 hk + a_5 k^2 + o(r^2)$$

som approximerar funktionen lokalt måste vara taylorpolynomet av grad 2,

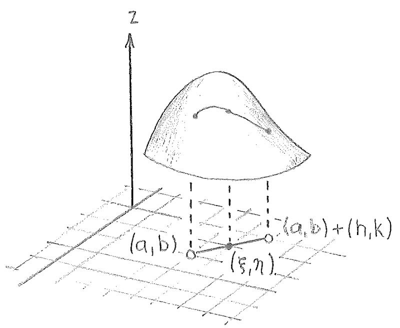
$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$$
$$+ \tfrac{1}{2} f''_{xx}(a,b)h^2 + \tfrac{1}{2}\left(f''_{xy}(a,b) + f''_{yx}(a,b)\right)hk + \tfrac{1}{2} f''_{yy}(a,b)k^2 + o(r^2).$$

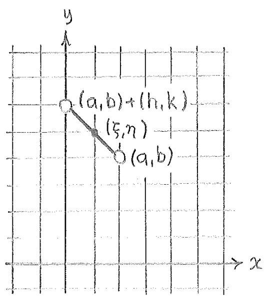
Två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner

Om $f(x,y)$ är två gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $(x,y)=(a,b)$ finns en formel för resttermen

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = {} & f(a,b) + f_x'(a,b)h + f_y'(a,b)k \\ & + \tfrac{1}{2} f_{xx}''(a,b)h^2 + f_{xy}''(a,b)hk + \tfrac{1}{2} f_{yy}''(a,b)k^2 \\ & \boxed{\begin{aligned} &+ \tfrac{1}{2}\big(f_{xx}''(\xi,\eta) - f_{xx}''(a,b)\big)h^2 + \big(f_{xy}''(\xi,\eta) - f_{xy}''(a,b)\big)hk \\ &+ \tfrac{1}{2}\big(f_{yy}''(\xi,\eta) - f_{yy}''(a,b)\big)k^2, \end{aligned}} \end{aligned}$$

där (ξ,η) ligger på linjestycket mellan (a,b) och $(a,b)+(h,k)$.





Denna formel ger direkt följande resultat:

Om en funktion är två gånger kontinuerligt deriverbar i en punkt, då är funktionen två gånger differentierbar där.

Taylors formel i matrisform

Taylors formel av ordning 2 i två variabler kan sammanfattas som

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = f(a,b) + & \overbrace{\begin{pmatrix} f_x'(a,b) & f_y'(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}^{\text{linjära termer}} \\ & + \underbrace{\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}''(a,b) & f_{yx}''(a,b) \\ f_{xy}''(a,b) & f_{yy}''(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{\text{kvadratiska termer}} + o(r^2) \end{aligned}$$

Övning 5: Skriv Taylorutvecklingen i matrisform

$$f(1+h,2+k) = 4 - h + 2k - \tfrac{3}{2}h^2 - 4hk + k^2 + o(r^2)$$

Övning 6: Skriv Taylorutvecklingen utan matriser

$$f(0+h,0+k) = 3 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(r^2)$$

Tre variabler

Om $f(x,y,z)$ är tre gånger kontinuerligt deriverbar då lyder Taylors formel av ordning 2,

$$f(a+h,b+k,c+\ell) = f(a,b,c) + \overbrace{\begin{pmatrix} f'_x(a,b,c) & f'_y(a,b,c) & f'_z(a,b,c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix}}^{\text{linjära termer}}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx}(a,b,c) & f''_{yx}(a,b,c) & f''_{zx}(a,b,c) \\ f''_{xy}(a,b,c) & f''_{yy}(a,b,c) & f''_{zy}(a,b,c) \\ f''_{xz}(a,b,c) & f''_{yz}(a,b,c) & f''_{zz}(a,b,c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix}}_{\text{kvadratiska termer}}$$

$$+ o(r^2)$$

Högre ordningar

Funktioner kan Taylorutvecklas till högre ordningar än 2,

$$f(a+h,b+k) = (\text{polynom av grad } n \text{ i } h,k) + o(r^n)$$

men den allmänna formeln är komplicerad.