Föreläsning 11-12

- Optimering i planet
  - Lokala och globala extrempunkter
  - Kompakta områden
- Inre stationära punkter
  - Klassificering
- Stationära punkter på en kurva
  - Lagrangevillkoret
  - Lagrangefunktionen
  - Parametrisering av kurvan
- Sammanfattning
- Icke-kompakta områden

Optimering

Ett optimeringsproblem går ut på att bestämma det största eller minsta värde som en funktion antar i ett område.

Dessa problem är vanliga i tillämpningar.

$$\text{maximise} \quad \sum_{t=1}^{6} \lambda_t \sum_{i=1}^{2} \gamma_i Q_{i,t} + \lambda_f((\gamma_1+\gamma_2)M_1(6) + \gamma_2 M_2(6)).$$

$$M_{1,t} - M_{1,t-1} + Q_{1,t} + S_{1,t} = V_1, \qquad t = 1, \dots 6,$$

$$M_{2,t} - M_{2,t-1} + Q_{2,t} + S_{2,t} - Q_{1,t} - S_{1,t} = V_2, \qquad t = 1, \dots 6.$$

$$0 \le Q_{i,t} \le \bar{Q}_i, \qquad i = 1, 2, t = 1, \dots, 6,$$

$$0 \le S_{i,t}, \qquad i = 1, 2, t = 1, \dots, 6,$$

$$0 \le M_{i,t} \le \bar{M}_i, \qquad i = 1, 2, t = 1, \dots, 6.$$

Vid planeringen av hur mycket effekt ett vattenkraftverk ska producera nästa tidsintervall löser man ett optimeringsproblem.

$$\max \text{TS}$$
$$= \max \text{CS}(Q_1^B, Q_2^B, \dots) + \text{PS}(Q_1^S, Q_2^S, \dots)$$
$$= \max \textstyle\sum_i U_i(Q_i^B) - \sum_i C_i(Q_i^S)$$

Subject to
$$\text{(a) } \textstyle\sum_i Q_i^B = \sum_i Q_i^S \leftrightarrow \lambda$$
$$\text{(b) } g_i(Q_i^S) \le 0 \leftrightarrow \alpha_i$$
$$\text{(c) } h_i(Q_i^B) \le 0 \leftrightarrow \beta_i$$

Inom ekonomin vill man bestämma en produktionstakt och konsumtionstakt som maximerar det ekonomiska överskottet för samhället. Detta formuleras som att optimeringsproblem.

Optimering i planet

Lokala och globala extrempunkter

En punkt (a,b) är en lokal minimipunkt till $f(x,y)$ om

$$f(a,b) \leq f(x,y)$$

för alla (x,y) i en omgivning av (a,b).

En punkt (a,b) är en lokal maximipunkt till $f(x,y)$ om

$$f(a,b) \geq f(x,y)$$

för alla (x,y) i en omgivning av (a,b).

En punkt (a,b) är en global minimipunkt till $f(x,y)$ om

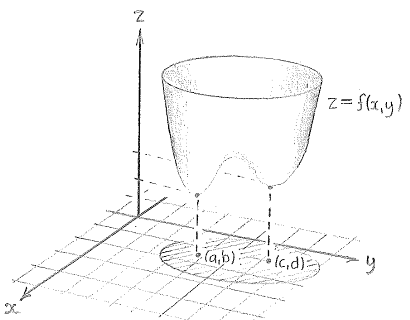
$$f(a,b) \leq f(x,y)$$

för alla (x,y) i definitionsmängden till f.

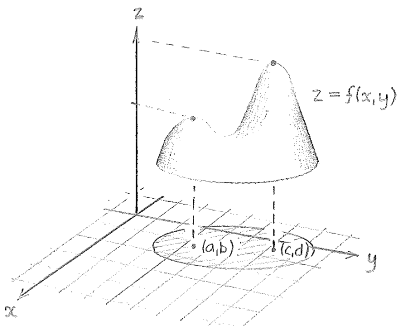
En punkt (a,b) är en global maximipunkt till $f(x,y)$ om

$$f(a,b) \geq f(x,y)$$

för alla (x,y) i definitionsmängden till f.



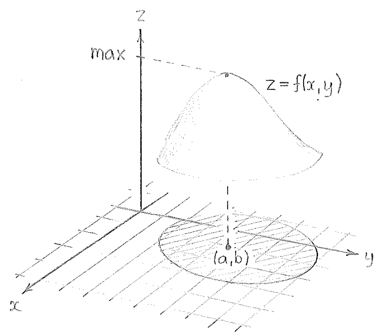
Punkterna (a,b) och (c,d) är lokala minimipunkter. Punkten (a,b) är en global minimipunkt.



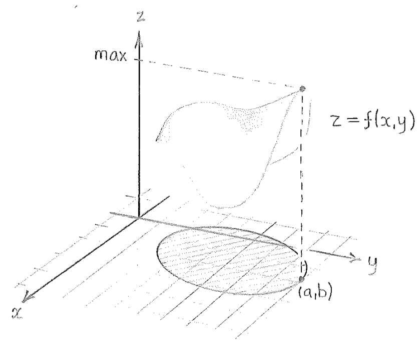
Punkterna (a,b) och (c,d) är lokala maximipunkter. Punkten (c,d) är en global maximipunkt.

Optimering över kompakta områden

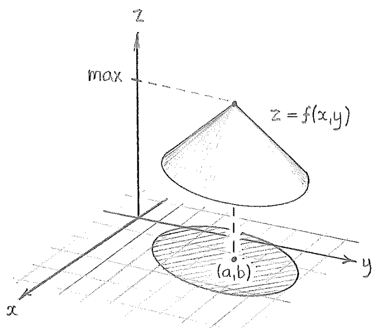
En kontinuerlig funktion f antar alltid ett största och minsta värde i ett kompakt område. Det finns fyra typer av punkter där max/min kan antas.



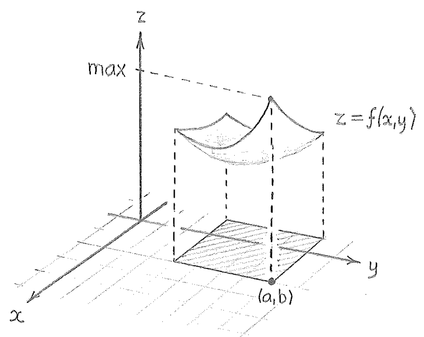
① Inre stationära punkter. Inre punkter (a,b) där $f'_{\bar{v}}(a,b)=0$ för alla riktningar $\bar{v}$.



② Stationära randpunkter. Randpunkter (a,b) där $f'_{\bar{v}}(a,b)=0$ för alla riktningar $\bar{v}$ parallella med randen.



③ Punkter (a,b) där f inte är differentierbar.



④ Singulära randpunkter och hörnpunkter.

Inre stationära punkter

Antag att $f(x,y)$ är differentierbar.

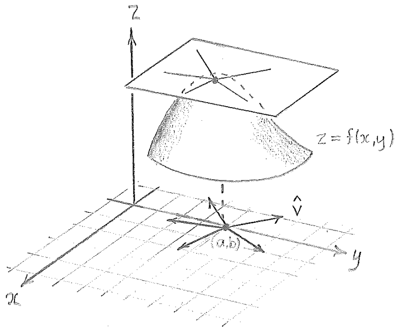
Funktionen $f(x,y)$ antar lokala max- och minvärden endast i inre punkter (a,b) där

$$f'_{\hat{v}}(a,b) = 0$$

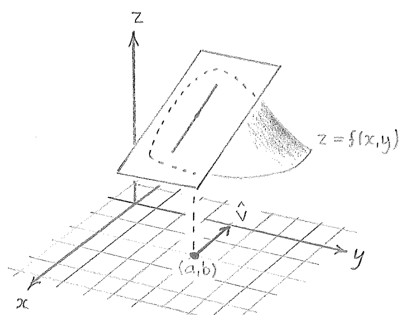
för alla riktningar $\hat{v}$. Eftersom

$$f'_{\hat{v}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \hat{v}$$

så är $\nabla f(a,b) = (0,0)$ i den stationära punkten.



① Punkten (a,b) är en inre stationär punkt. Riktningsderivatan $f'_{\hat{v}}(a,b) = 0$ för alla riktningar $\hat{v}$.



② Punkten (a,b) är inte en inre stationär punkt. Eftersom $f'_{\hat{v}}(a,b) > 0$ växer f i riktningen $\hat{v}$ och avtar i riktningen $-\hat{v}$. Alltså är (a,b) varken en max- eller minpunkt.

Exempel 1: Bestäm alla stationära punkter till

$$f(x,y) = 8xy - 4x^2y - 2xy^2 + x^2y^2.$$

Övning 1: Bestäm alla stationära punkter till

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2.$$

Övning 2: Bestäm alla stationära punkter till

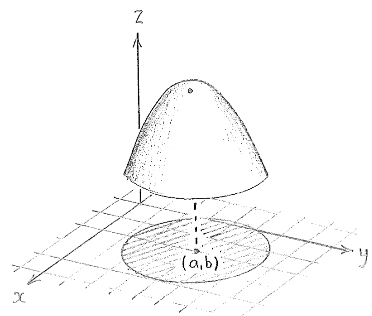
$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$$

Klassificering av inre stationära punkter

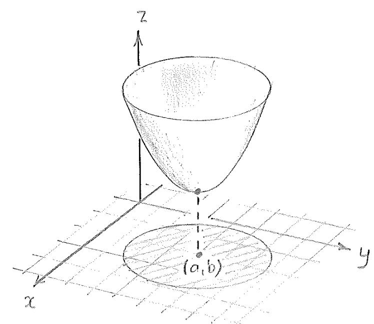
Taylorutveckla funktionen $f(x,y)$ kring en inre stationär punkt (a,b) till ordning 2

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{yx}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \text{R.T.}$$

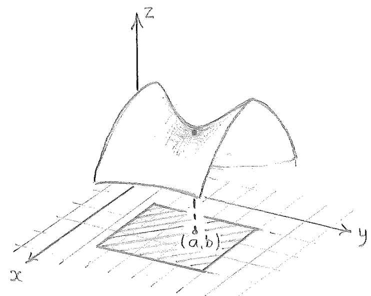
Den stationära punktens karaktär (lokalt max, min eller ingetdera) avgörs av den kvadratiska formens tecken.



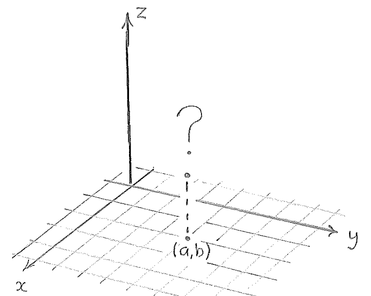
① Negativt definit form medför att (a,b) är en lokal maxpunkt.



② Positivt definit form medför att (a,b) är en lokal minpunkt.



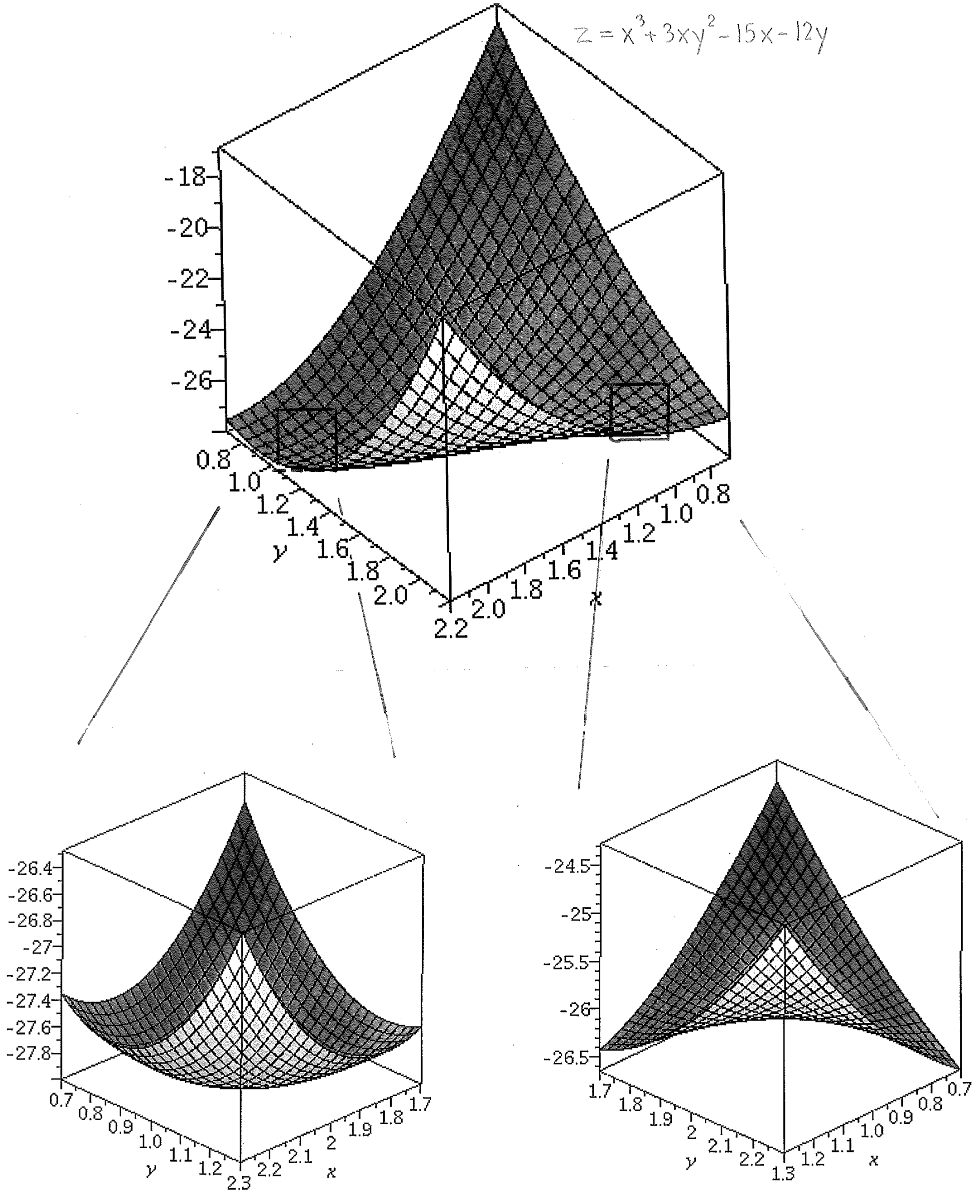
③ Indefinit form medför att (a,b) är en sadelpunkt (varken max, min).



④ Vid semidefinit form kan ingen slutsats dras.

Exempel 2: Bestäm alla lokala extrempunkter till

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$



Övning 3: Funktionen $f(x,y) = xy(1-x-y)$ har nedanstående Taylorutvecklingar. Avgör motsvarande punkters karaktär (lokalt max, lokalt min eller ingetdera).

a) $f(0+h, 0+k) = hk + o(r)$

b) $f(1+h, 0+k) = -hk - k^2 + o(r)$

c) $f(-1+h, 0+k) = -2k + 3hk + k^2 + o(r)$

d) $f(0+h, 1+k) = -h^2 - hk + o(r)$

e) $f(0+h, -1+k) = -2h + h^2 + 3hk + o(r)$

f) $f(\frac{1}{3}+h, \frac{1}{3}+k) = \frac{1}{27} - \frac{1}{3}(h^2 + hk + k^2) + o(r)$

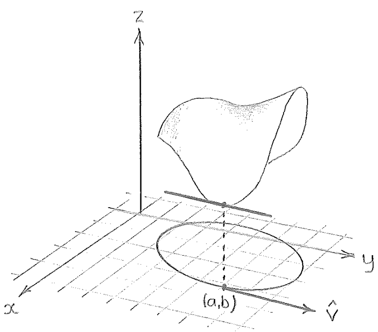
Stationära punkter på en kurva

Antag att $f(x,y)$ är differentierbar och att kurvan saknar singulära punkter.

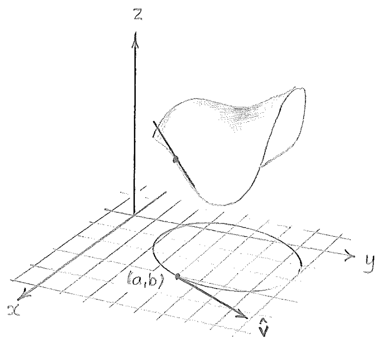
På kurvan antar f lokala max- och min-värden endast i punkter (a,b) där

$$f'_{\hat{v}}(a,b) = 0$$

för alla riktningar $\hat{v}$ parallella med kurvan i punkten (a,b).



(1) Punkten (a,b) är en stationär punkt på kurvan. Riktningsderivatan $f'_{\hat{v}}(a,b) = 0$.
I punkten (a,b) kan f ha ett min- eller maxvärde på kurvan.

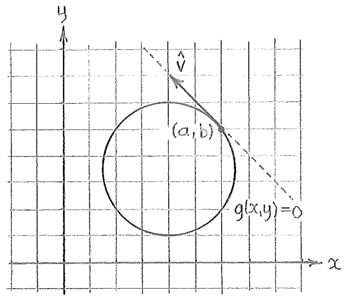


(2) Punkten (a,b) är inte en stationär punkt på kurvan. Eftersom $f'_{\hat{v}}(a,b) < 0$ avtar f i riktningen $\hat{v}$ utmed kurvan och f växer i riktningen $-\hat{v}$. Alltså är (a,b) varken en min- eller maxpunkt.

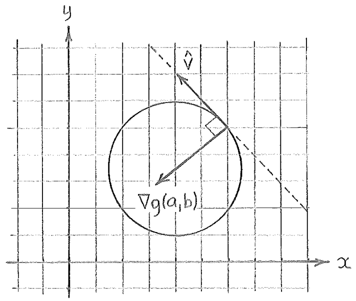
Lagrangevillkoret

I en stationär punkt (a,b) till $f(x,y)$ på kurva $g(x,y)=0$ gäller att

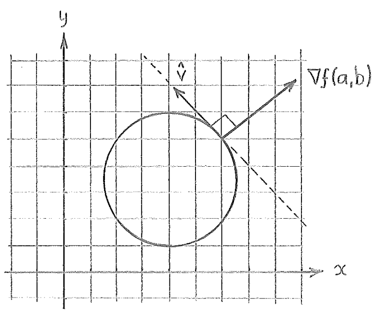
$\nabla f(a,b)$ och $\nabla g(a,b)$ är parallella.



(1) Punkten (a,b) ligger på kurvan $g(x,y) = 0$ och $\hat{v}$ är en vektor parallell med kurvan i (a,b).



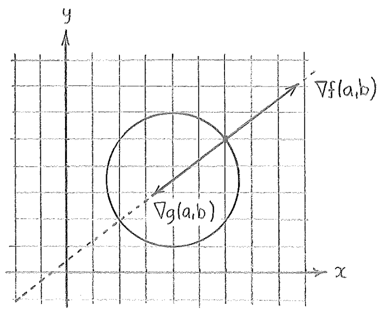
(2) Gradienten $\nabla g(a,b)$ är en normal till kurvan $g(x,y)=0$ i punkten (a,b).



(3) Eftersom (a,b) är en stationär punkt på kurvan är

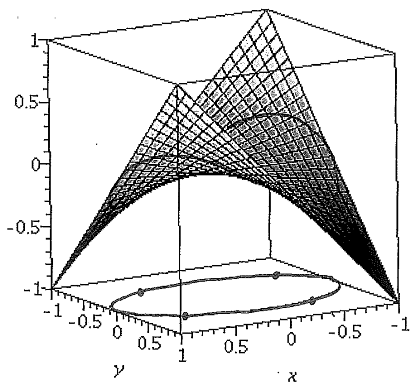
$$f'_{\hat{v}}(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot\hat{v} = 0,$$

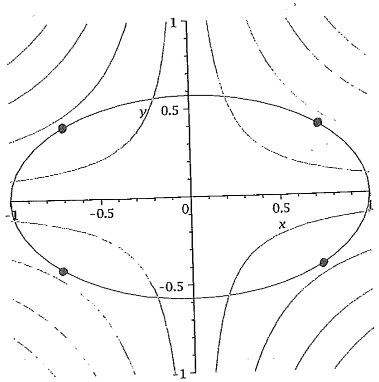
dvs $\nabla f(a,b)$ är vinkelrät mot $\hat{v}$.



(4) Detta betyder att både $\nabla g(a,b)$ och $\nabla f(a,b)$ är vinkelräta mot $\hat{v}$, dvs $\nabla f(a,b)$ och $\nabla g(a,b)$ måste vara parallella.

Exempel 3: Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y) = xy$ på ellipsen $x^2 + 3y^2 = 1$.





Lagrangefunktionen

Stationära punkter till funktionen $f(x,y)$ på kurvan $g(x,y) = 0$ uppfyller

∇f och ∇g är parallella,

dvs är lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Genom att införa Lagrangefunktionen

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

ges lösningarna till $(*)$ som de stationära punkterna till L,

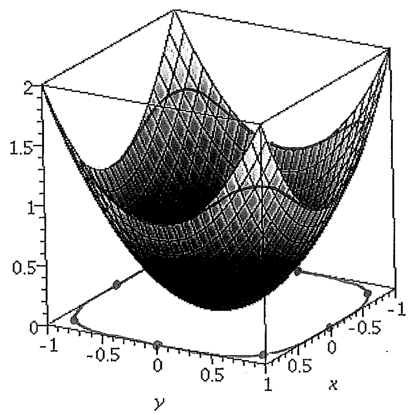
$$\frac{\partial L}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

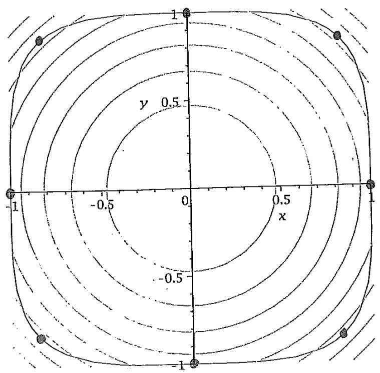
$$\frac{\partial L}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv 0 - g(x,y) = 0$$

dvs $\nabla L = (0,0,0)$.

Exempel 4: Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y) = x^2+y^2$ på kvirkeln $x^4+y^4=1$.





Övning 4: Skriv upp Lagrangefunktionen till följande problem:

a) Bestäm stationära punkter till $f(x,y) = xy$ på kurvan $2x^2 + y^2 = 1$.

b) Bestäm stationära punkter till $f(x,y) = e^{x-y}$ på kurvan $3x + 4y = 1$.

c) Vilka punkter på ellipsen $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$ ligger närmast origo?

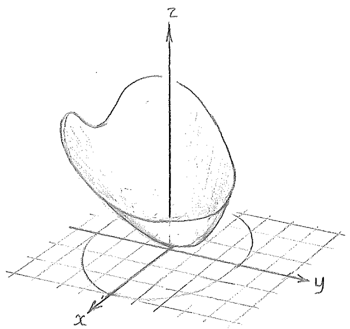
Parametrisering av kurvan

Om randkurvan kan parametriseras

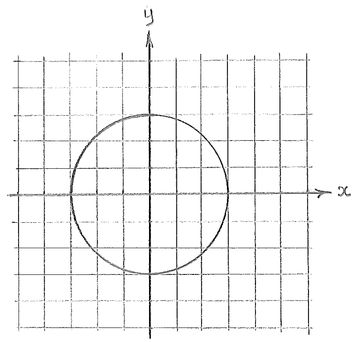
$$(x,y) = (x(t), y(t))$$

då uppfyller de stationära randpunkterna

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 0.$$



① Vi ska bestämma stationära randpunkter till $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x + 1$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

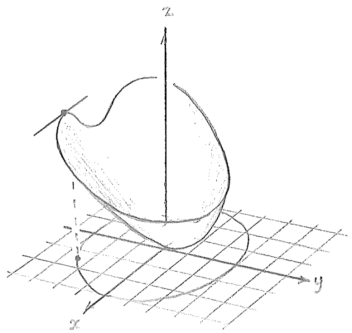


② Parametrisera randcirkeln

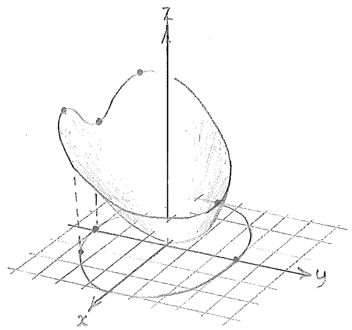
$(x,y) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$,

På randcirkeln är

$f(\cos t, \sin t) = \cdots = 3 - \cos^2 t - \cos t$



③ De stationära randpunkterna ges av $\frac{d}{dt} f(\cos t, \sin t) \equiv \sin t\,(2\cos t + 1) = 0$.



④ Lösningarna är $t = 0$, $t = 2\pi/3$, $t = \pi$ och $t = 4\pi/3$. Motsvarande punkter är $(1,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(-1,0)$ resp. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

Exempel 5: Bestäm alla stationära randpunkter till $f(x,y) = 2 - 3x^2 + y^2 - 3\ln(1 + x^2 + y^2)$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

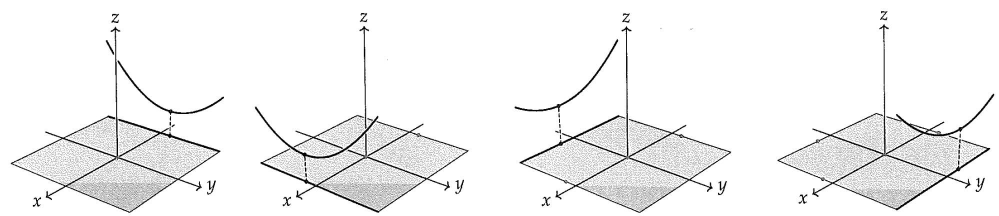
Sammanfattning

Optimering i planet

Antag att f och g är differentierbara funktioner. Då antar funktionen $f(x,y)$ lokala extrempunkter i området $g(x,y) \leq 0$ i följande typer av punkter

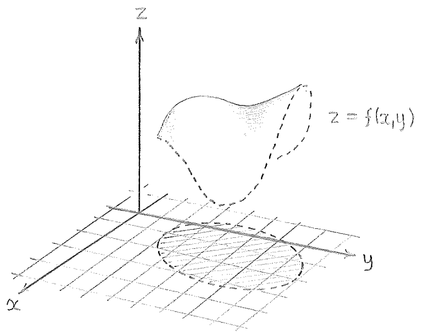
1. inre stationära punkter, dvs där $\nabla f = (0,0)$,
2. stationära punkter på randkurvan, dvs där $\nabla f = \lambda \nabla g$.
3. singulära randpunkter, dvs där $\nabla g = (0,0)$.
4. ändpunkter till randkurvan.

Exempel 6: Bestäm det största och minsta värde som $f(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2$ antar i kvadraten $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

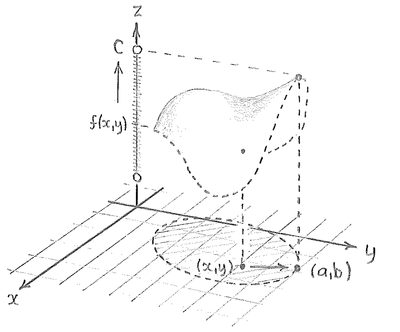


Optimering över icke-kompakta områden

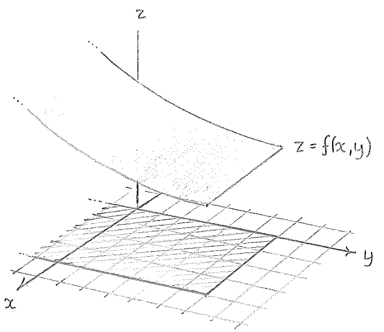
På ett område som inte är kompakt behöver en kontinuerlig funktion inte anta ett största eller minsta värde.



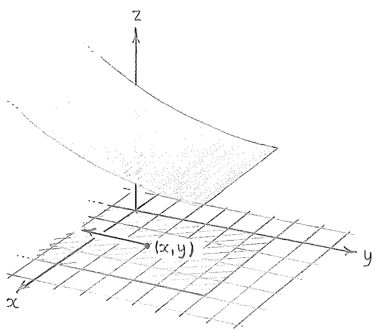
① Antag att vi har ett öppet område (randen tillhör inte området) och en kontinuerlig funktion $f(x,y)$.



② När $(x,y) \to (a,b)$ går $f(x,y)$ mot värdet C som är större än alla funktionsvärden f antar i områden.



① Antag att vi har ett obegränsat område och en kontinuerlig funktion $f(x,y)$.



② När (x,y) rör sig bort i den obegränsade delen av området växer $f(x,y)$ obegränsat.