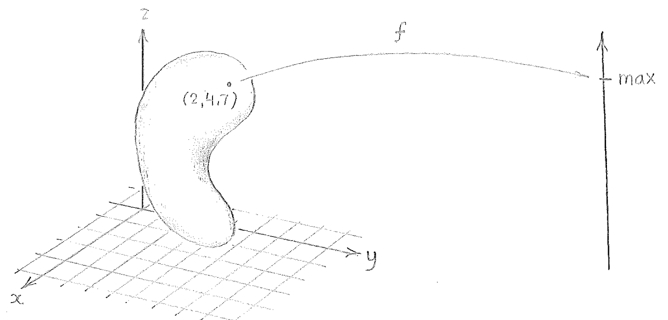
Föreläsning 13

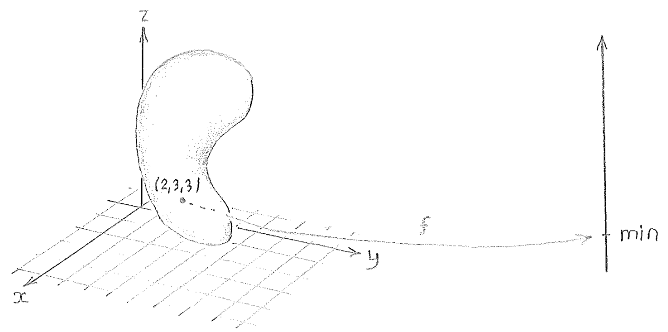
- Optimering i rummet
  - Kompakta områden
- Inre stationära punkter
- Stationära punkter på en yta
  - Lagrangevillkoret
  - Lagrangefunktionen
  - Parametrisering av ytan
- Stationära punkter på en skärningskurva
  - Lagrangevillkoret
  - Lagrangefunktionen
- Sammanfattning

Optimering i rummet

Ett optimeringsproblem i rummet går ut på att bestämma det största eller minsta värde som en funktion $f(x,y,z)$ antar i ett område i rummet.



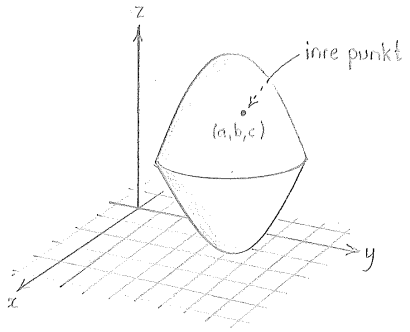
① I randpunkten $(x,y,z)=(2,4,7)$ antar funktionen $f(x,y,z)$ sitt största värde i området.

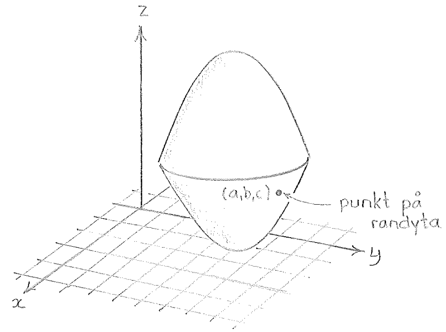


② I den inre punkten $(x,y,z)=(2,2,3)$ antar funktionen $f(x,y,z)$ sitt minsta värde i området.

Optimering över kompakta områden

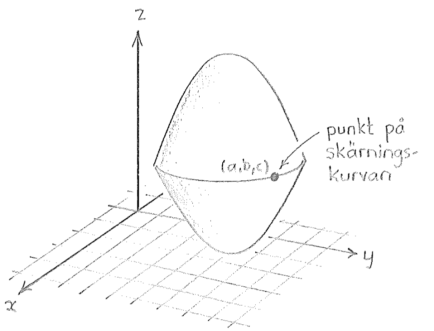
En kontinuerlig funktion f antar alltid ett största och minsta värde i ett kompakt område. Det finns fyra typer av punkter där max/min kan antas för en differentierbar funktion.

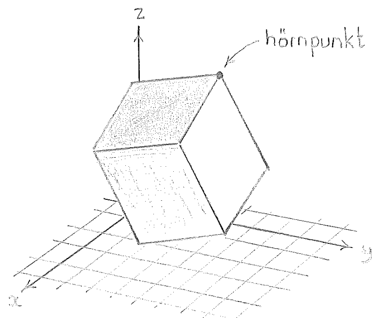




① Inre stationära punkter
Inre punkter (a,b,c) där $f'_{\hat{v}}(a,b,c) = 0$ för alla riktningar.

② Stationära punkter på en randyta
Punkter (a,b,c) på en randyta där $f'_{\hat{v}}(a,b,c) = 0$ för alla riktningar $\hat{v}$ parallella med randytan.





③ Stationära punkter på skärningen mellan randytor.
Punkter (a,b,c) på skärnings-kurvan mellan två randytor där $f'_{\hat{v}}(a,b,c) = 0$ för riktningar parallella med kurvan.

④ Hörnpunkter och singulära punkter.

Inre stationära punkter

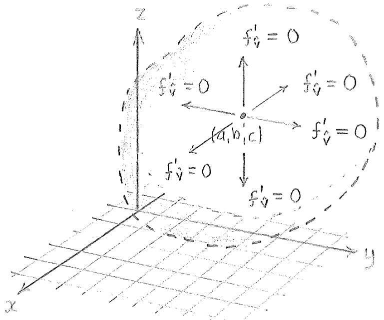
Antag att $f(x,y,z)$ är differentierbar. Funktionen $f(x,y,z)$ antar lokala max- och min-värden endast i inre punkter (a,b,c) där

$$f'_{\hat{v}}(a,b,c) = 0$$

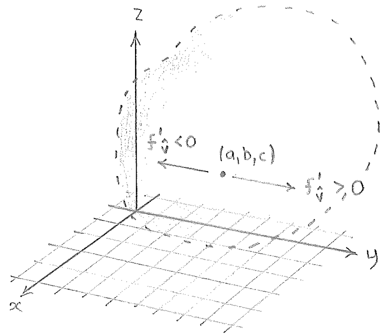
för alla riktningar $\hat{v}$. Eftersom

$$f'_{\hat{v}}(a,b,c) = \nabla f(a,b,c) \cdot \hat{v}$$

så är $\nabla f(a,b,c) = (0,0,0)$ i den stationära punkten.



① Punkten (a,b,c) är en inre stationär punkt. Riktningsderivatan $f'_{\hat{v}}(a,b,c) = 0$ för alla riktningar $\hat{v}$.



② Punkten (a,b,c) är inte en inre stationär punkt. Eftersom $f'_{\hat{v}}(a,b,c) > 0$ växer f i riktningen $\hat{v}$ och avtar i riktningen $-\hat{v}$. Alltså är (a,b,c) varken en max- eller minpunkt.

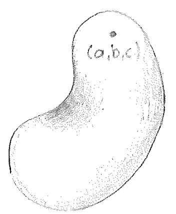
Övning 1: Bestäm alla stationära punkter till

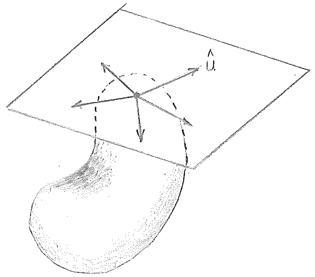
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z - xy - xz.$$

Stationära punkter på en yta

Om $f(x,y,z)$ är differentierbar, då gäller för en icke-singulär lokal extrempunkt (a,b,c) på ytan att

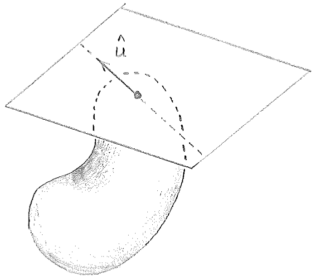
$f'_{\hat{u}}(a,b,c) = 0$ för alla $\hat{u}$ parallella med ytan.

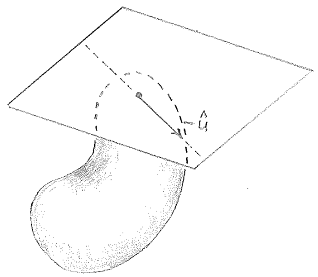




① Antag att vi har en lokal max/min-punkt (a,b,c) på ytan

② Då måste det gälla att $f'_{\hat{u}}(a,b,c) = 0$ när $\hat{u}$ är parallell med tangentplanet till ytan.





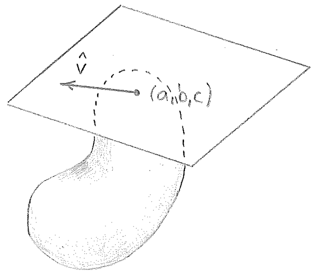
③ Antag nämligen att $f'_{\hat{u}}(a,b,c) > 0$. Då växer f i riktningen $\hat{u}$ och (a,b,c) kan inte vara en lokal maxpunkt.

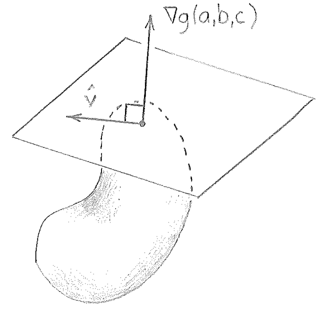
④ Samtidigt gäller att $f'_{-\hat{u}}(a,b,c) < 0$ dvs f avtar i riktningen $-\hat{u}$ och (a,b,c) kan inte vara en lokal minpunkt.

Lagrangevillkoret

I en stationär randpunkt (a,b,c) till $f(x,y,z)$ på ytan $g(x,y,z) = 0$ gäller att

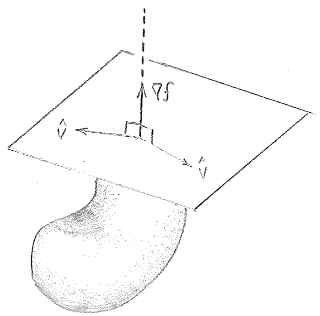
$\nabla f(a,b,c)$ och $\nabla g(a,b,c)$ är parallella.

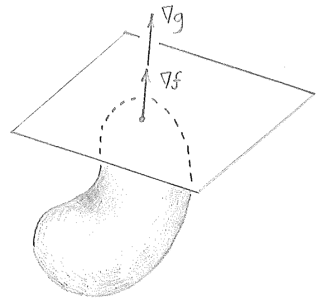




① Punkten (a,b,c) ligger på ytan $g(x,y,z) = 0$ och $\hat{v}$ är en vektor parallell med ytan i (a,b,c).

② Gradienten $\nabla g(a,b,c)$ är en normal till ytan $g(x,y,z) = 0$ i punkten (a,b,c).





③ Eftersom (a,b,c) är en stationär punkt på ytan är $f'_{\hat{v}}(a,b,c) = \nabla f(a,b,c) \cdot \hat{v} = 0$, dvs $\nabla f(a,b,c)$ är vinkelrät mot $\hat{v}$ när $\hat{v}$ är parallell med ytan.

④ Detta betyder att både $\nabla g(a,b,c)$ och $\nabla f(a,b,c)$ är vinkelräta mot tangentplanet till $g(x,y,z) = 0$ i (a,b,c), dvs $\nabla g(a,b,c)$ och $\nabla f(a,b,c)$ måste vara parallella.

Exempel 1: Bestäm det största värde som $f(x,y,z) = x+z^2$ antar på enhetssfären.

Lagrangefunktionen

Stationära punkter till funktionen $f(x,y,z)$ på ytan $g(x,y,z)=0$ uppfyller

∇f och ∇g är parallella,

dvs är lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Genom att införa Lagrangefunktionen

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

ges lösningarna till $(*)$ som de stationära punkterna till L,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 - g(x,y,z) = 0$$

dvs $\nabla L = (0,0,0,0)$.

Övning 2: Skriv upp Lagrangefunktionen till följande problem:

a) Bestäm stationära punkter till $f(x,y,z) = xy + yz$ på sfären $x^2+y^2+z^2=2$.

b) Bestäm det största värde som summan av tre positiva tal kan anta om deras produkt är 8.

Parametrisering av ytan

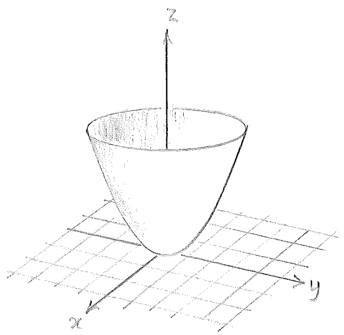
Om ytan kan parametriseras

$$(x,y,z) = (x(s,t),\, y(s,t),\, z(s,t))$$

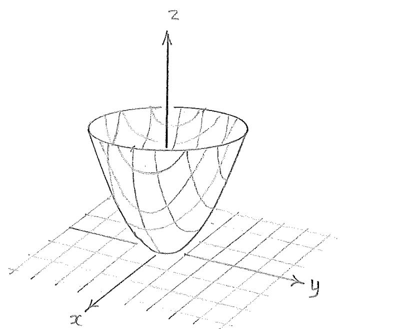
då uppfyller de stationära punkterna på ytan

$$\frac{\partial}{\partial s} f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = 0$$



(1) Vi ska bestämma stationära punkter till $f(x,y,z) = x+y-z$ på paraboloiden $z = x^2+y^2$.

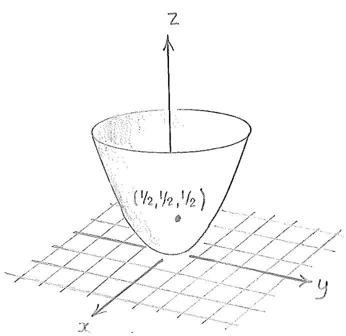


(2) Parametrisera paraboloiden med $(x,y,z) = (s,\, t,\, s^2+t^2)$.
På ytan är
$f(s, t, s^2+t^2) = s+t-s^2-t^2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}(s+t-s^2-t^2) = 1-2s = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(s+t-s^2-t^2) = 1-2t = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad s = \frac{1}{2}$ och $t = \frac{1}{2}$

(3) De stationära punkterna ges av $(s,t) = (1/2, 1/2)$.

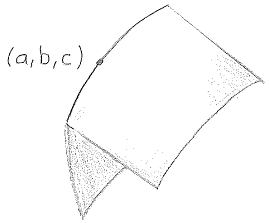


(4) En stationär punkt $(1/2, 1/2, 1/2)$ finns på paraboloiden.

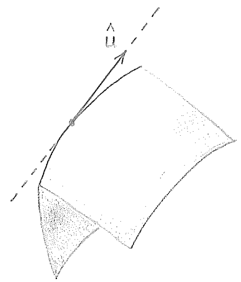
Stationära punkter på en skärningskurva

Om $f(x,y,z)$ är differentierbar, då gäller för en icke-singulär lokal extrempunkt (a,b,c) på en skärningskurva mellan två ytor att

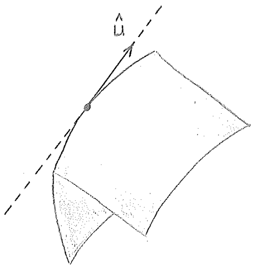
$$f'_{\hat{u}}(a,b,c) = 0 \quad \text{för alla } \hat{u} \text{ parallella med kurvan.}$$



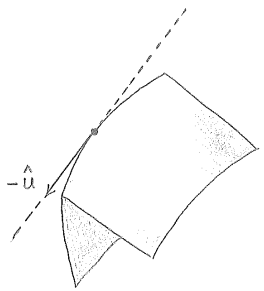
① Antag att vi har en lokal max/min-punkt (a,b,c) på skärningskurvan där två ytor möts.



② Då måste det gälla att
$f'_{\hat{u}}(a,b,c) = 0$
när $\hat{u}$ pekar i tangentlinjens riktning.



③ Antag nämligen att
$f'_{\hat{u}}(a,b,c) > 0$.
Då växer f i riktningen $\hat{u}$ och (a,b,c) kan inte vara en lokal maxpunkt.

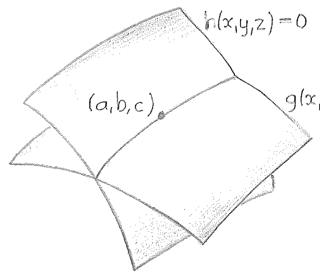


④ Samtidigt gäller att
$f'_{-\hat{u}}(a,b,c) < 0$
dvs f avtar i riktningen $-\hat{u}$ och (a,b,c) kan inte vara en lokal minpunkt.

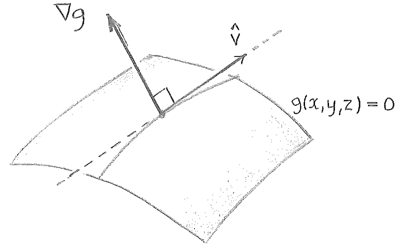
Lagrangevillkoret

I en stationär punkt (a,b,c) till $f(x,y,z)$ på skärningskurvan mellan ytorna $g(x,y,z)=0$ och $h(x,y,z)=0$ gäller att

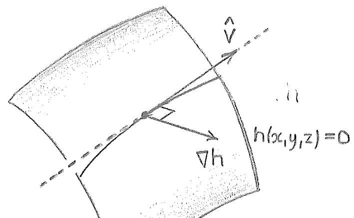
$$\{\nabla f(a,b,c),\ \nabla g(a,b,c),\ \nabla h(a,b,c)\} \text{ är linjärt beroende.}$$



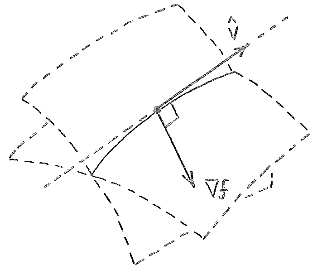
① Kurvan är skärningskurva mellan nivåytorna $g(x,y,z)=0$ och $h(x,y,z)=0$.



② Eftersom kurvan ligger på ytan $g(x,y,z)=0$ är en vektor $\hat{v}$ parallell med kurvan i (a,b,c) vinkelrät mot $\nabla g(a,b,c)$.



③ På samma sätt, om $\hat{v}$ är parallell med kurvan i (a,b,c) så är $\hat{v}$ vinkelrät mot $\nabla h(a,b,c)$.



④ Eftersom (a,b,c) är en stationär randpunkt är
$f'_{\hat{v}}(a,b,c) = \nabla f(a,b,c) \cdot \hat{v} = 0$
dvs $\hat{v}$ är vinkelrät mot $\nabla f(a,b,c)$.

Exempel 2: Bestäm det största och minsta värde som xyz antar då $x^2+y^2+z^2=1$ och $x+y=1$.

Lagrangefunktionen

När vi söker stationära punkter till $f(x,y,z)$ på skärningskurvan mellan ytorna $g(x,y,z)=0$ och $h(x,y,z)=0$ har vi villkoret

∇f, ∇h och ∇g är linjärt beroende,

som leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Vi inför därför Lagrangefunktionen

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z).$$

Då är lösningarna till $(*)$ desamma som de stationära punkterna till

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda g'_x - \mu h'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y - \mu h'_y = 0 \\ L'_z = f'_z - \lambda g'_z - \mu h'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 - g - 0 = 0 \\ L'_\mu = 0 - 0 - h = 0 \end{cases}$$

Sammanfattning

Optimering i rummet

Antag att f, g och h är differentierbara funktioner.

Då antar funktionen $f(x,y,z)$ lokala extremvärden i ett kompakt område i följande typer av punkter

1. inre stationära punkter, dvs där $\nabla f = (0,0,0)$,
2. stationära punkter på en randyta $g=0$, dvs där $\nabla f = \lambda \nabla g$,
3. stationära punkter på en skärningskurva mellan två randytor $g=0$ och $h=0$, dvs $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$.
4. hörnpunkter och singulära punkter på randen.

Exempel 3: Bestäm det största och minsta värde som $f(x,y,z) = x+y+z$ antar i området $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.