Föreläsning 14

- Dubbelintegraler
  - Volym
  - Riemannsummor
  - Icke-rektangulära områden
- Iterationsformler
  - Rektanglar
  - Enkla områden i y-led
  - Enkla områden i x-led

Dubbelintegraler

Volym

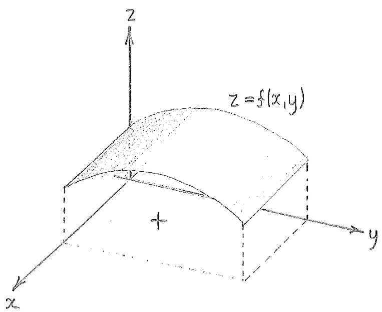
Om $f(x,y) \geq 0$ är en kontinuerlig funktion, då är dubbelintegralen

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

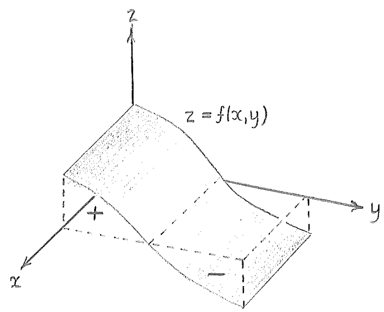
lika med volymen mellan xy-planet och funktionsytan $z = f(x,y)$ inom området D.

Om integranden $f(x,y)$ både antar positiva och negativa värden i området D, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix}\text{Volym ovanför} \\ xy\text{-planet}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Volym under} \\ xy\text{-planet}\end{pmatrix}.$$



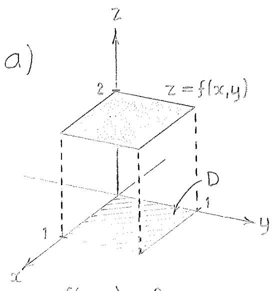
Dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är lika med volymen av området markerat med $+$.



Dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är lika med volymen av området $+$ minus volymen av området $-$.

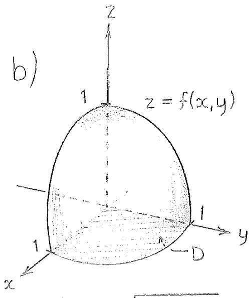
Övning 1: Bestäm $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

a)



$f(x,y) = 2$

b)

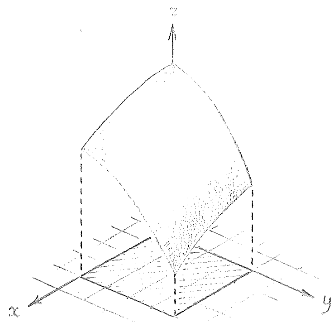


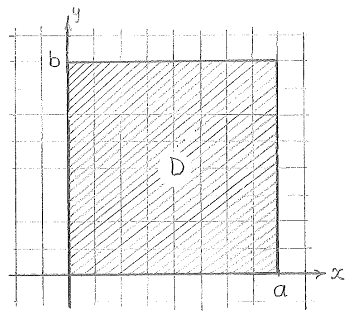
$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Riemannsummor

Dubbelintegraler kan beräknas genom att bestämma ett gränsvärde av Riemannsummor,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{(m,n)\to(\infty,\infty)\\(\Delta x_i,\Delta y_j)\to(0,0)}} \sum_{\substack{0\le i\le m-1\\0\le j\le n-1}} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$



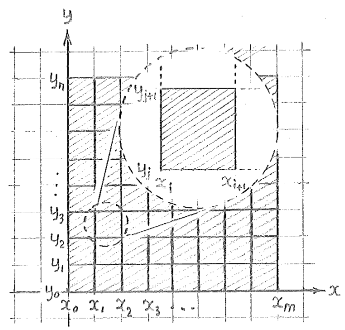


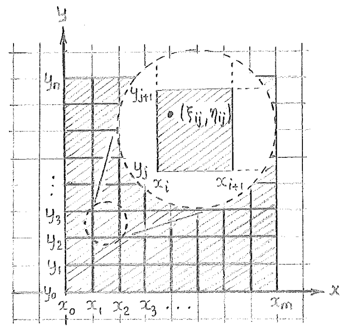
(1) Vi ska bestämma

$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

dvs volymen under ytan.

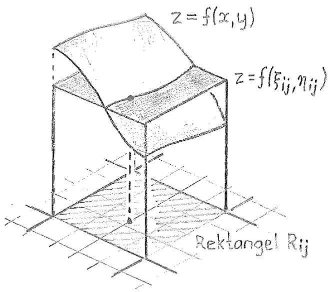
(2) Integrationsområdet D är rektangeln $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.



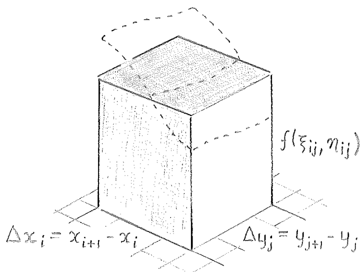


(3) Partitionera D med delrektanglar genom att dela in $[0,a]$ i m st delintervall och $[0,b]$ i n st delintervall.

(4) I varje delrektangel $R_{ij} = \{x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le y_{j+1}\}$ väljer vi en punkt (ξ_{ij},η_{ij}).

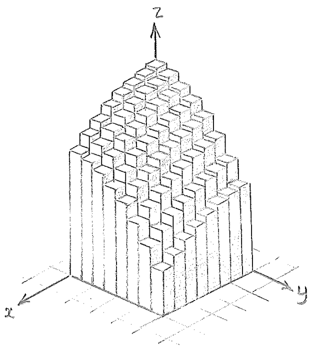


(5) Inom delrektangeln R_{ij} approximeras volymen V_{ij} med volymen av ett rätblock med höjden $z = f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$.

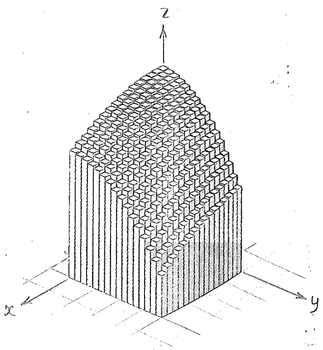


(6) Volymen av rätblocket är

$$\begin{aligned} V_{ij} &\approx (\text{basarea}) \cdot (\text{höjd}) \\ &= (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \cdot f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \\ &= f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j. \end{aligned}$$



(7) Den totala volymen approximeras med summan rätblockens volymer.



(8) Ju finare partitionen av D görs desto bättre blir approximationen.

$$V \approx \sum_{\substack{0 \le i \le m-1 \\ 0 \le j \le n-1}} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

(9) Summan som approximerar volymen kallas för en Riemannsumma.

$$V = \lim_{\substack{(m,n) \to (\infty,\infty) \\ (\Delta x_i, \Delta y_j) \to (0,0)}} \sum_{\substack{0 \le i \le m-1 \\ 0 \le j \le n-1}} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

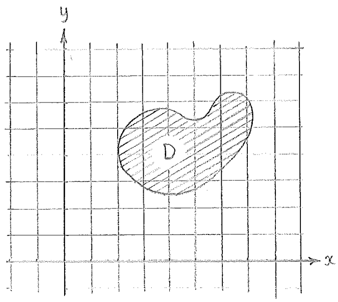
(10) Genom att låta $m, n \to \infty$ och delrektanglarnas kantlängder $\Delta x_i, \Delta y_j \to 0$ borde Riemannsumman konvergera mot dubbelintegralens värde.

Icke-rektangulära områden

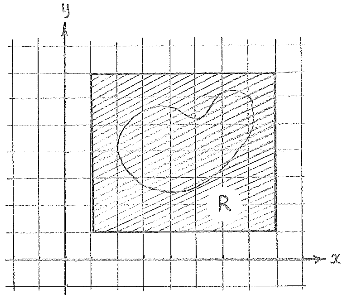
Om integrationsområdet D inte är en rektangel definierar vi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R F(x,y)\,dx\,dy$$

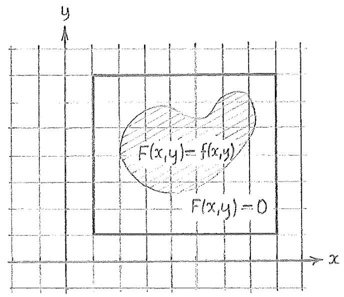
där R är en rektangel som innehåller D och $F(x,y) = f(x,y)$ i D och $F(x,y) = 0$ utanför D.



(1) Vi har ett integrationsområde D.



(2) Låt R vara en rektangel som innehåller D.



(3) Definiera funktionen $F(x,y)$ som lika med $f(x,y)$ i D och lika med 0 utanför D.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R F(x,y)\,dx\,dy$$

(4) Då definierar vi dubbelintegralen av $f(x,y)$ över D som dubbelintegralen av $F(x,y)$ över R.

Om $f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion på ett kompakt område D med kontinuerligt deriverbara randkurvor, då existerar dubbelintegraler

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

och Riemannsummor konvergerar mot detta värde.

Iterationsformler

Rektanglar

Om $f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion på rektangeln $D: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

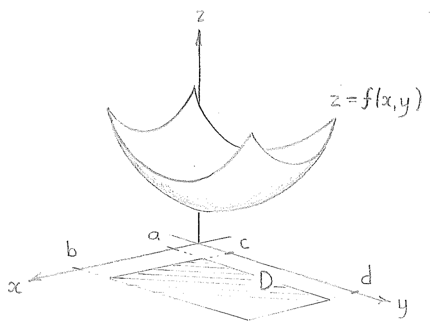
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Övning 2: Skriv $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, där D är rektangeln $2 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1$, som en upprepad enkelintegral

a) genom att först integrera y, sedan x.

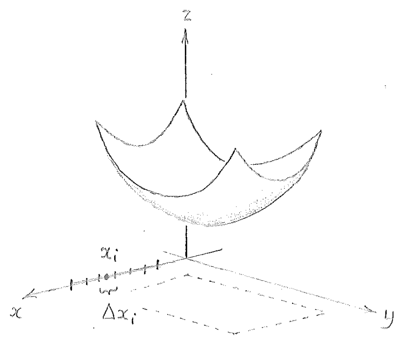
b) genom att först integrera x, sedan y.

Bevisskiss

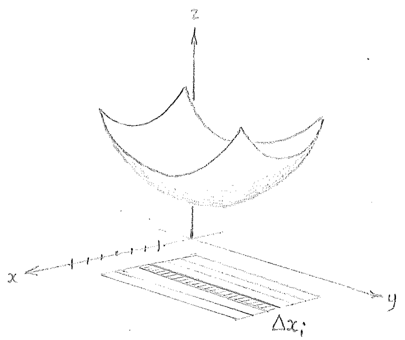


① Vi ska bestämma

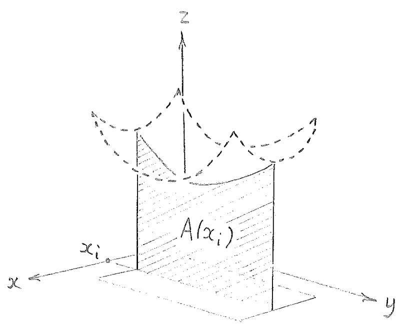
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$



② Dela in intervallet $[a,b]$ i m delintervall av längd Δx_i och välj en punkt x_i i varje delintervall.

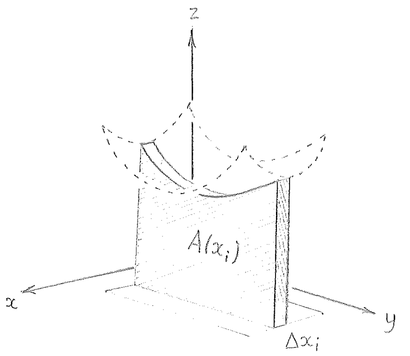


③ Detta ger en indelning av D i smala band parallella med y-axeln och bredd Δx_i.



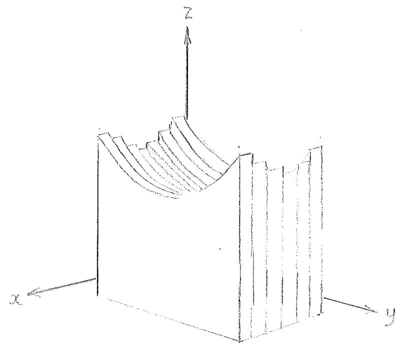
④ Fixera $x = x_i$. Då skär $x = x_i$ ut ett tvärsnitt som har arean

$$A(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\,dy$$



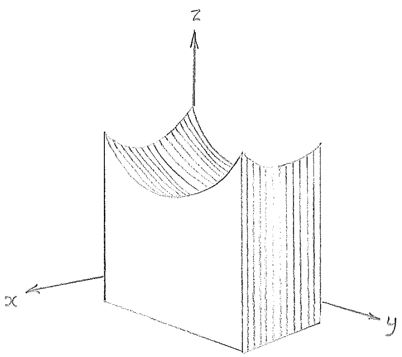
⑤ Inom bandet som innehåller x_i är volymen under funktionsytan

$$\Delta V_i = A(x_i)\,\Delta x_i .$$



⑥ Den totala volymen är approximativt

$$V \approx \sum_{i=0}^{m-1} A(x_i)\,\Delta x_i .$$



⑦ Approximationen blir bättre ju finare indelningen är.

$$V = \lim_{\substack{m \to \infty \\ \text{finhet} \to 0}} \sum_{i=0}^{m-1} A(x_i)\,\Delta x_i$$

$$= \int_a^b A(x)\,dx$$

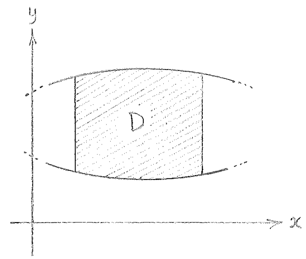
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx .$$

⑧ Summaformeln för volymen är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

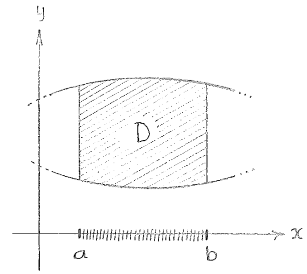
Enkla områden i y-led

Ett område som ligger mellan två funktionskurvor i y-led kallas för enkelt i y-led och kan beskrivas som

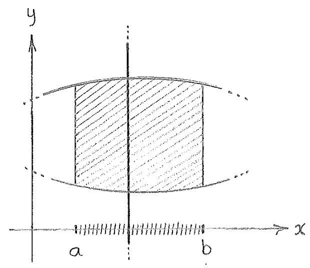
$$\begin{cases} a \le x \le b \\ c(x) \le y \le d(x) \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x : a \to b \\ y : c(x) \to d(x) \end{cases}$$



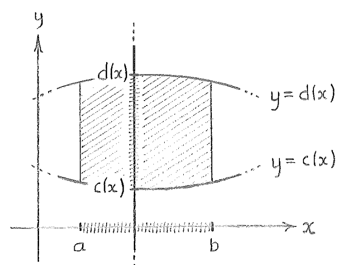
① Vi ska undersöka om området D är enkelt i y-led.



② Projicera ner alla punkter i D på x-axeln. Då fås intervallet $a \le x \le b$.

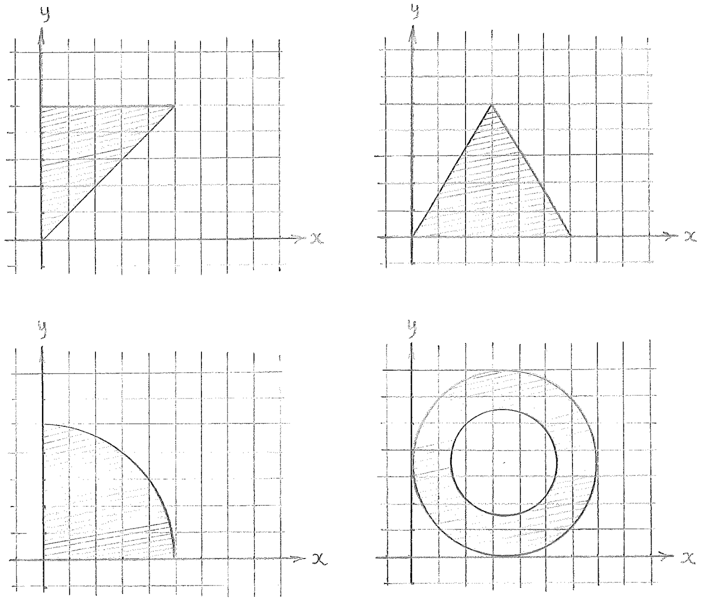


③ Genom varje x i $[a,b]$ drar vi en linje parallell med y-axeln.



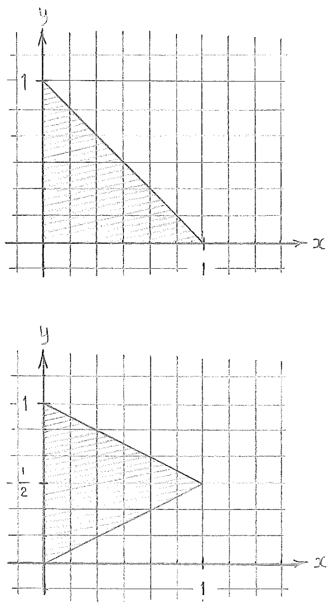
④ Om linjens skärning med D är ett sammanhängande intervall $c(x) \le y \le d(x)$ så är D enkelt i y-led.

Övning 3: Vilka områden är enkla i y-led?



Övning 4: Beskriv områdena på formen

$$x: a \to b\,, \quad y: c(x) \to d(x)$$



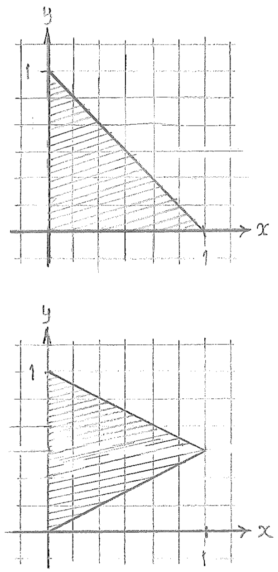
Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på det enkla området $D: \{x: a \to b,\ y: c(x) \to d(x)\}$, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Ofta skriver man den upprepade enkelintegralen som

$$\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy.$$

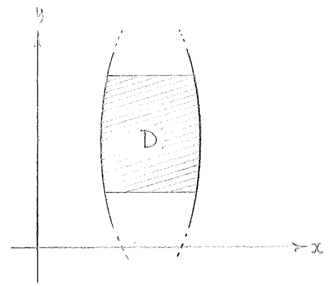
Exempel 1: Beräkna $\iint_D xy^2\,dx\,dy$ där D är nedanstående områden.



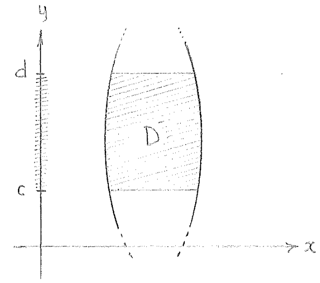
Enkla områden i x-led

Ett område som ligger mellan två funktions-kurvor i x-led kallas för enkelt i x-led och kan beskrivas som

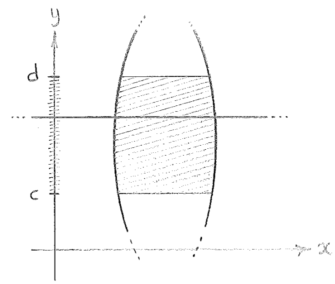
$$\begin{cases} a(y) \leq x \leq b(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x : a(y) \to b(y) \\ y : c \to d \end{cases}$$



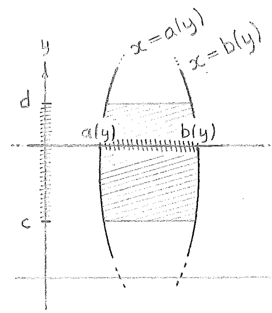
(1) Vi ska undersöka om området D är enkelt i x-led.



(2) Projicera alla punkter i D på y-axeln. Då fås ett intervall $c \leq y \leq d$



(3) Genom varje y i $[c,d]$ drar vi en linje parallell med. x-axeln.



(4) Om linjens skärning med D är ett sammanhängande intervall $a(y) \leq x \leq b(y)$ så är D enkelt i x-led.

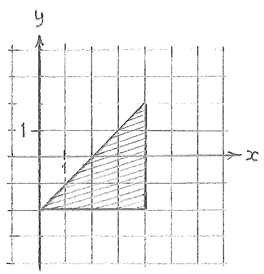
Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på det enkla området $D: \{x: a(y) \to b(y),\ y: c \to d\}$, då är

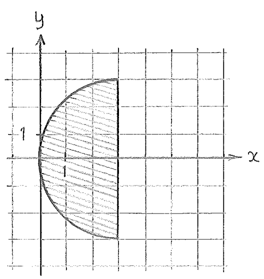
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Den upprepade enkelintegralen kan skrivas som

$$\int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx.$$

Övning 5: Skriv $\iint_D xy^2\,dx\,dy$ som upprepade enkelintegraler över områdena.





Exempel 2: Beräkna

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$$

där D är fyrhörningen med hörn i (1,1), (2,2), (2,1) och (4,2).

Exempel 3: Beräkna $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dx$.