Föreläsning 15

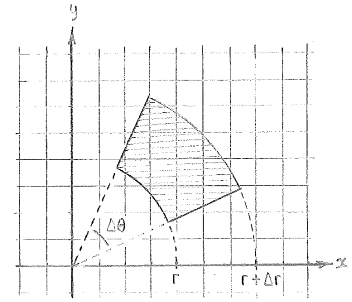
- Några areaformler
  - Polärt areaelement
  - Parallellogram
- Variabelsubstitution
  - Polär substitution
  - Allmän substitution
- Symmetrier

Några areaformler

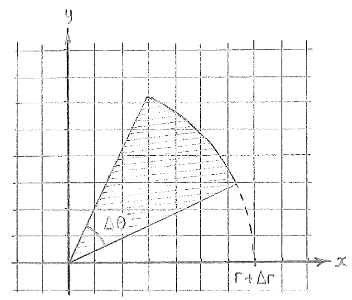
Polärt areaelement

Arean av ett polärt areaelement med vinkel $\Delta\theta$ och radier r och $r+\Delta r$ är

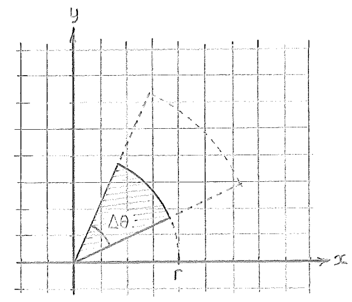
$$\text{Area} = r\,\Delta r\,\Delta\theta + \tfrac{1}{2}(\Delta r)^2\,\Delta\theta.$$



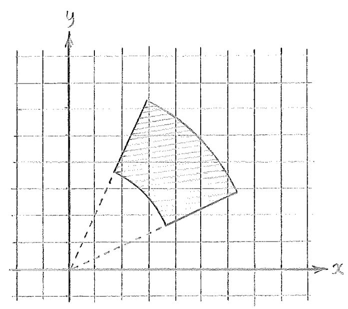
(1) Vi söker arean av ovanstående polära areaelement.



(2) Arean av en cirkelsektor med vinkel $\Delta\theta$ och radie $r+\Delta r$ är $\frac{1}{2}(\text{vinkel})\cdot(\text{radie})^2 = \frac{1}{2}\Delta\theta\,(r+\Delta r)^2$.



(3) Arean av en cirkelsektor med vinkel $\Delta\theta$ och radie r är $\frac{1}{2}(\text{vinkel})\cdot(\text{radie})^2 = \frac{1}{2}\Delta\theta\, r^2$.



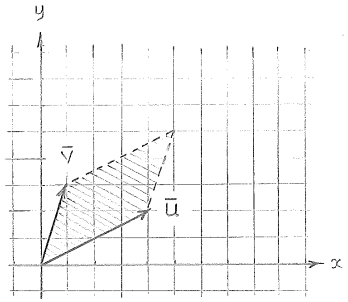
(4) Arean av cirkelringssektorn är lika med differensen av cirkelsektorernas areor,

$$\tfrac{1}{2}\Delta\theta\left[(r+\Delta r)^2 - r^2\right] = r\,\Delta r\,\Delta\theta + \tfrac{1}{2}(\Delta r)^2\,\Delta\theta.$$

Parallellogram

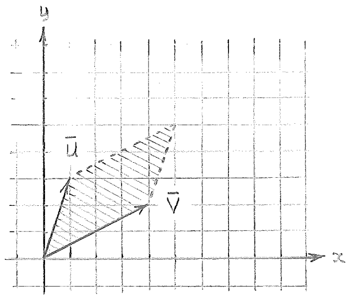
Arean (med tecken) av det parallellogram som vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ spänner upp ges av

$$\text{Area} = \begin{vmatrix} | & | \\ \bar{u} & \bar{v} \\ | & | \end{vmatrix}.$$



Vektorerna $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ är högerhandsorienterade och arean av parallellogrammet ges av

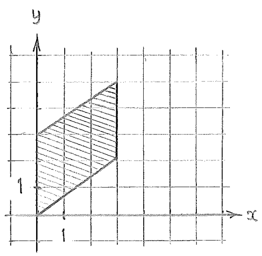
$$\text{Area} = \begin{vmatrix} | & | \\ \bar{u} & \bar{v} \\ | & | \end{vmatrix}.$$

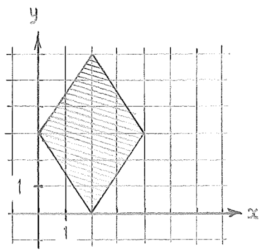


När $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ är vänsterhandsorienterade ges parallellogrammets area av

$$\text{Area} = -\begin{vmatrix} | & | \\ \bar{u} & \bar{v} \\ | & | \end{vmatrix}.$$

Övning 1: Skriv upp en determinantformel för respektive area.



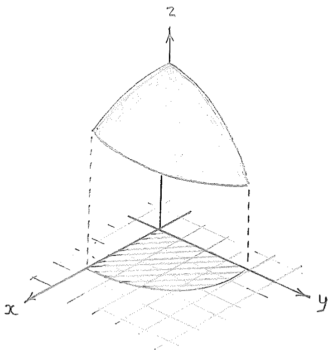


Variabelsubstitution

Polär substitution

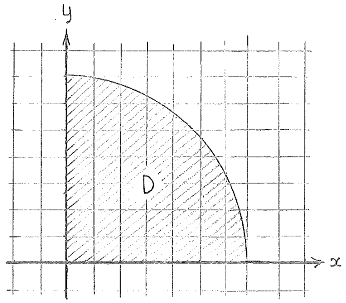
Vid byte till polära koordinater ändras en dubbelintegral enligt formeln

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

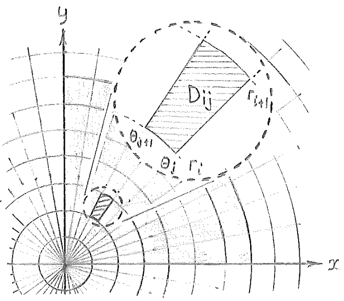


(1) Vi ska bestämma

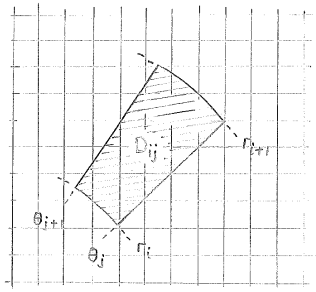
$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$



(2) Integrationsområdet D är kvartscirkelskivan $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$ i polära koordinater.



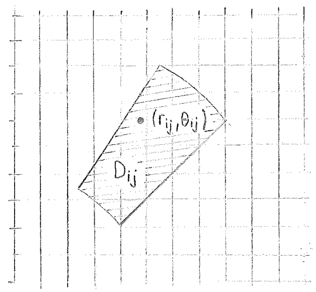
(3) Partitionera D i polära areaelement D_{ij} genom att dela in $0 \le r \le 1$ i m st delintervall och $0 \le \theta \le \pi/2$ i n st delintervall.



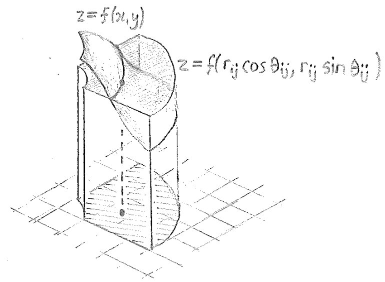
(4) Det polära elementet D_{ij} har arean

$$\Delta A_{ij} = r_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j + (\text{restterm}),$$

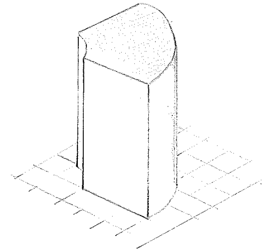
där $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$ och $\Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$.



(5) I varje delelementet D_{ij} väljer vi en punkt (r_{ij}, θ_{ij}).

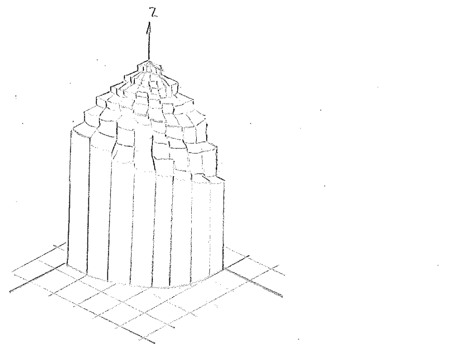


(6) Inom elementet D_{ij} approximeras volymen ΔV_{ij} med volymen av en stapel med höjd $z = f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij})$.



(7) Volymen av en stapel är

$$V_{ij} \approx (\text{basarea})\cdot(\text{höjd}) = r_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j \cdot f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij}) + \text{restterm}.$$



(8) Den totala volymen approximeras med summan av staplarnas volymer.

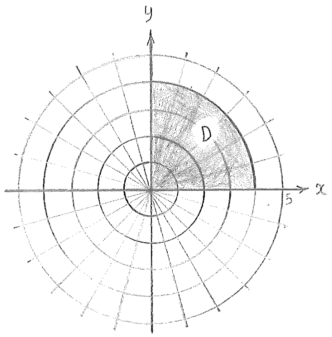
$$V \approx \sum f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij}) \times r_{ij}\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j + \text{R.T.}$$

(9) Summan som approximerar volymen är en Riemannsumma.

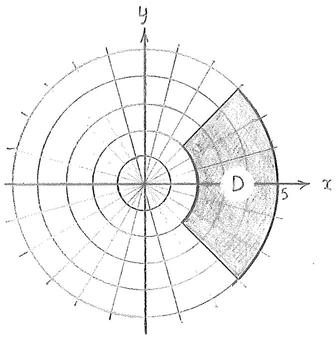
$$V = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

(10) Riemannsumman konvergerar mot en dubbelintegral när $m, n \to \infty$ samtidigt som $\Delta r_i, \Delta\theta_j \to 0$.

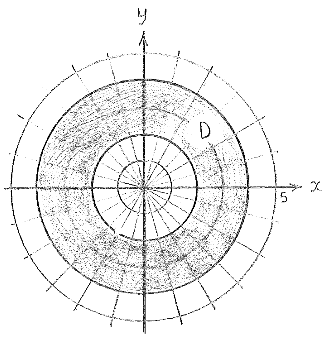
Övning 2: Skriv integralerna efter en polär substitution.



$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$



$$\iint_D xy\,dx\,dy$$



$$\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy$$

Exempel 1: Beräkna

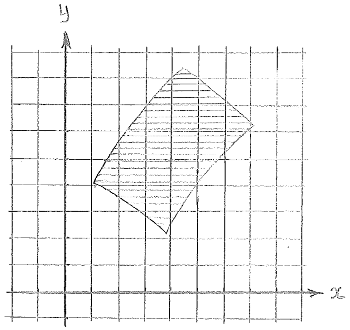
$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

där $D:\ x^2+y^2 \leq 1$.

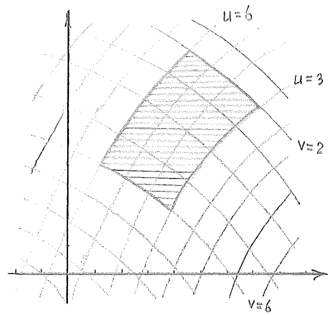
Allmän substitution

Vid byte till allmänna koordinater u, v ändras en dubbelintegral enligt formeln

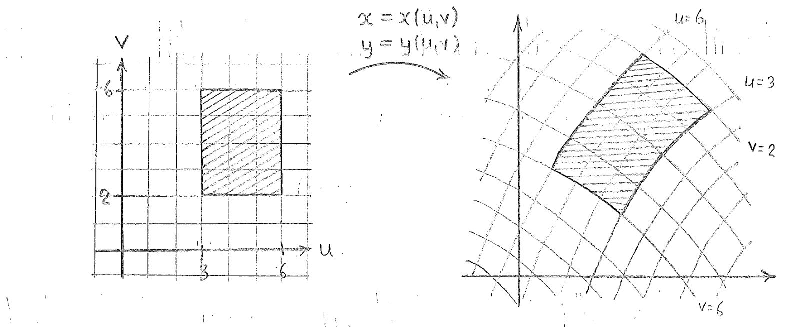
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u,v),\, y(u,v)) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$



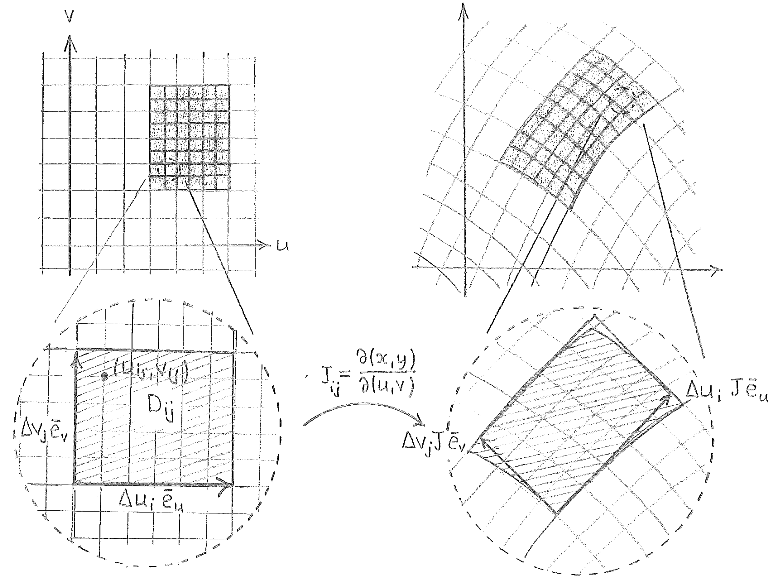
(1) Området D har en komplicerad beskrivning i x,y-koordinater



(2) Området D har en enkel beskrivning i u,v-koordinater: $3 \leq u \leq 6,\ \ 2 \leq v \leq 6.$



(3) Sambandet mellan parametrarna (u,v) och (x,y) kan uttryckas som en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$.



(4) Partitionera parameterområdet $3 \leq u \leq 6$, $2 \leq v \leq 6$ med delrektanglar och avbilda dessa till en partitionering av D.
Varje delrektangel avbildas till ett approximativt parallellogram med den lokala linjära approximationen $J = \partial(x,y)/\partial(u,v)$ och parallellogrammet har arean

$$\Delta A_i = \Delta u_i \Delta v_j \left|\det \begin{pmatrix} | & | \\ J\bar{e}_u & J\bar{e}_v \\ | & | \end{pmatrix}\right| = \Delta u_i \Delta v_j\, |\det J|.$$

$$V \approx \sum f(x(u_i, v_j),\, y(u_i, v_j)) \times |\det J_{ij}|\, \Delta u_i \Delta v_j$$

(5) Dubbelintegralens värde approximeras med en Riemannsumma.

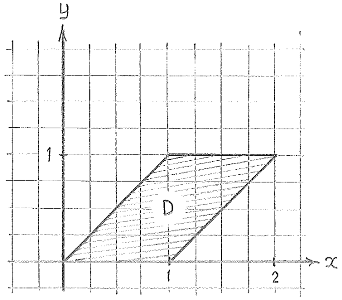
$$V = \iint_D f(x(u,v), y(u,v))\, |\det J|\, du\,dv$$

(6) I gränsen konvergerar dubbelintegralen mot ovanstående integral.

Exempel 2: Beräkna

$$\iint_D e^{x-y}\,dx\,dy$$

där D är parallellogrammet i figuren.



Exempel 3: Härled formeln för polär substitution

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

från formeln för allmän substitution.

Exempel 4: Bestäm arean av området
$1 \leq x + y \leq 2, \ 1 \leq y/x \leq 2.$

Symmetrier

Symmetriresonemang kan förenkla uträkningar av många integraler.

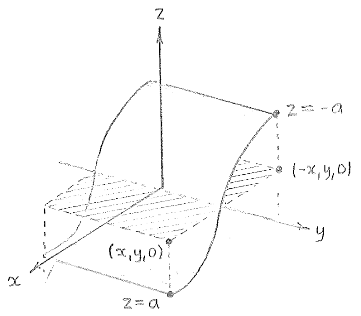
Udda funktioner

En funktion $f(x,y)$ är udda i x-led om

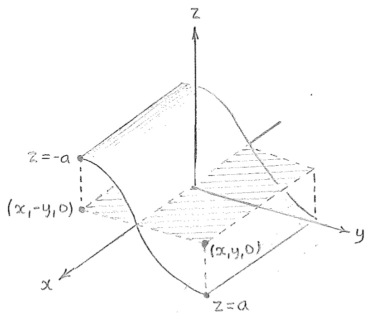
$$f(-x,y) = -f(x,y)$$

och udda i y-led om

$$f(x,-y) = -f(x,y).$$



En udda funktion i x-led



En udda funktion i y-led

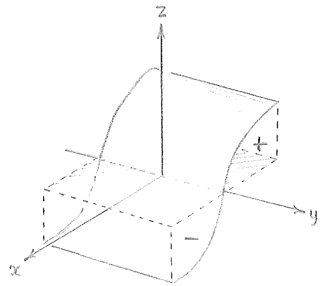
Övning 3: Vilka funktioner är udda i x- resp. y-led?

a) $f(x,y) = xy$ b) $f(x,y) = x$

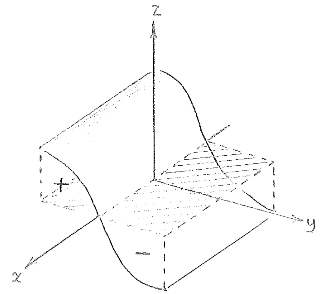
c) $f(x,y) = x^2y$ d) $f(x,y) = \cos xy$

Om en udda funktion i x-led $f(x,y)$ integreras över ett område D som är symmetriskt i x-led, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$



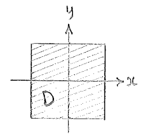
För en udda funktion i x-led över ett symmetriskt område i x-led finns lika mycket volym inneslutet av funktionsytan ovan som under xy-planet



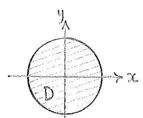
För en udda funktion i y-led över ett symmetriskt område i y-led finns lika mycket volym inneslutet av funktionsytan ovan som under xy-planet.

Övning 4: Vilka integraler har värdet 0 av symmetriskäl?

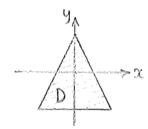
a) $\iint_D \sin xy\,dx\,dy$



b) $\iint_D x\,dx\,dy$



c) $\iint_D x^2y\,dx\,dy$



d) $\iint_D xy^2\,dx\,dy$