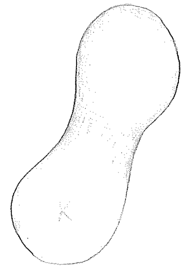
Föreläsning 16

- Exempel
- Trippelintegraler
  - Definition
  - Godtyckliga områden
- Iterationsformler
  - Rätblock
  - Enkla områden i z-led
  - Enkla områden i x- och y-led
  - Snittning

Exempel på trippelintegraler

Värme

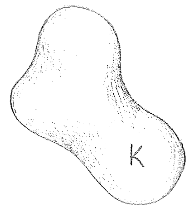


Det värme som en kropp K innehåller ges av

$$Q = C \iiint_K T(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

där C är kroppens värmekapacitet och $T(x,y,z)$ är temperaturen.

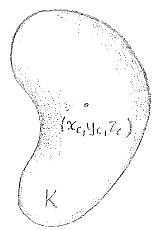
Volym



Volymen av en kropp K ges av

$$\text{Volym} = \iiint_K dx\, dy\, dz$$

Masscentrum



Masscentrum för en kropp K med densitet $\rho(x,y,z)$ ges av

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_K x\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$y_c = \frac{1}{m} \iiint_K y\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$z_c = \frac{1}{m} \iiint_K z\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

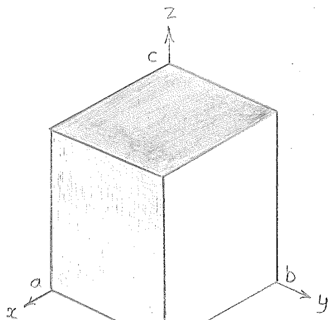
där m är kroppens massa.

Trippelintegraler

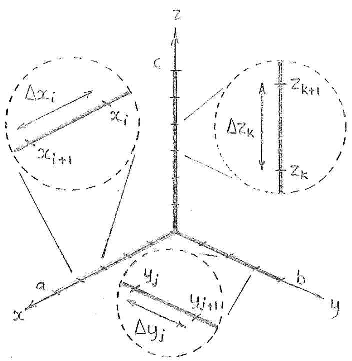
Definition

Trippelintegraler över ett rätblock D i rummet definieras som ett gränsvärde av Riemannsummor,

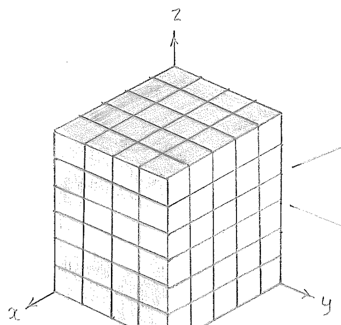
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\ell,m,n\to\infty \\ \Delta x_i,\Delta y_j,\Delta z_k\to 0}} \sum_{\substack{0\le i\le \ell-1 \\ 0\le j\le m-1 \\ 0\le k\le n-1}} f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\tau_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k .$$



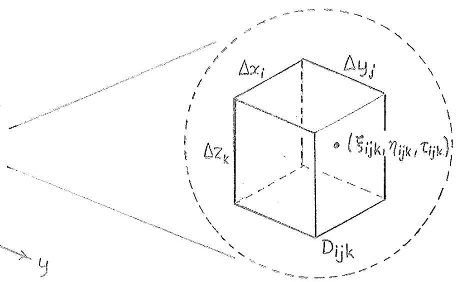
① Antag att integrationsområdet D är rätblocket $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$.



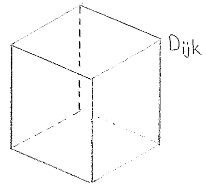
② Dela in intervallen $[0,a]$, $[0,b]$ och $[0,c]$ i ℓ st, m st resp. n st delintervall.



③ Detta ger en partition av rätblocket D i små delrätblock D_{ijk}.

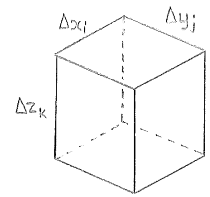


④ I varje delrätblock D_{ijk} väljer vi en punkt $(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\tau_{ijk})$.



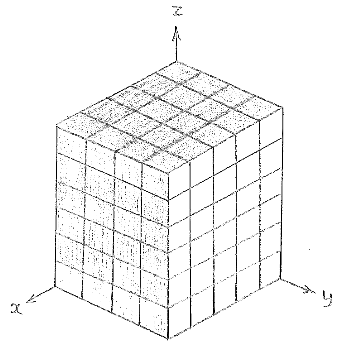
$f(x,y,z)\approx f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\tau_{ijk})$

⑤ Inom delrätblocket D_{ijk} approximerar vi $f(x,y,z)$ med $f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\tau_{ijk})$.

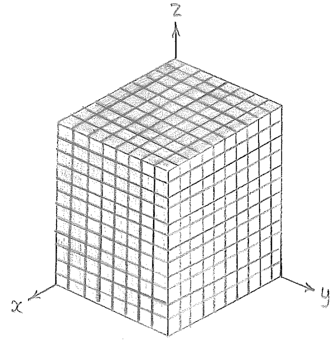


⑥ Bidraget från D_{ijk} till integralens värde är

$$\Delta V_{ijk} \approx (f\text{:s värde})\cdot(\text{volym}) = f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\tau_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k .$$



⑦ Integralens värde är approximativt summan av delrätblockens bidrag.



⑧ Ju finare partitionen av D görs desto bättre blir approximationen.

$$V \approx \sum_{\substack{0\le i\le \ell-1 \\ 0\le j\le m-1 \\ 0\le k\le n-1}} f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\tau_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

⑨ Summan som approximerar integralen kallas för en Riemannsumma.

$$V = \lim_{\substack{\ell,m,n\to\infty \\ \Delta x_i,\Delta y_j,\Delta z_k\to 0}} \sum_{\substack{0\le i\le \ell-1 \\ 0\le j\le m-1 \\ 0\le k\le n-1}} f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\tau_{ijk})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

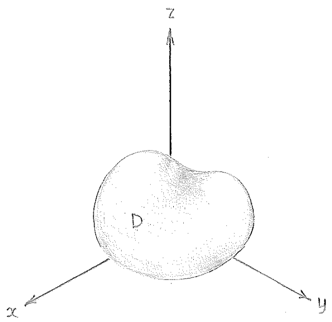
⑩ Genom att låta $\ell,m,n\to\infty$ och delrätblockens kantlängder $\Delta x_i,\Delta y_j,\Delta z_k\to 0$ så konvergerar Riemannsumman mot integralens värde.

Godtyckliga områden

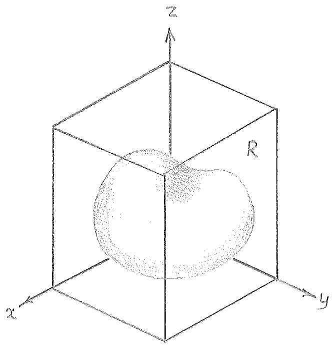
Om integrationsområdet D inte är ett rätblock definierar vi

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

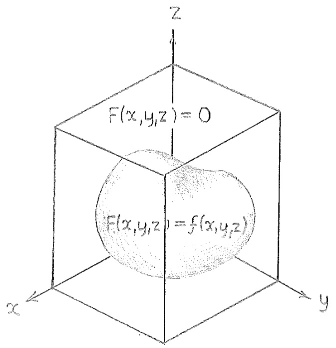
där R är ett rätblock som innehåller D och $F(x,y,z) = f(x,y,z)$ i D och $F(x,y,z) = 0$ utanför D.



(1) Vi har ett integrationsområde D.



(2) Låt R vara ett rätblock som innehåller D.



(3) Definiera $F(x,y,z)$ lika med $f(x,y,z)$ i D och $F(x,y,z) = 0$ utanför D.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(4) Då definierar vi trippelintegralen av $f(x,y)$ över D som trippelintegralen av $F(x,y,z)$ över R.

Om $f(x,y,z)$ är en kontinuerlig funktion på ett kompakt område D med kontinuerligt deriverbara randytor, då existerar trippelintegralen

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

dvs alla Riemannsummor konvergerar mot ett och samma värde.

Iterationsformler

Rätblock

Om $f(x,y,z)$ är en kontinuerlig funktion på rätblocket $D: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f$, då är

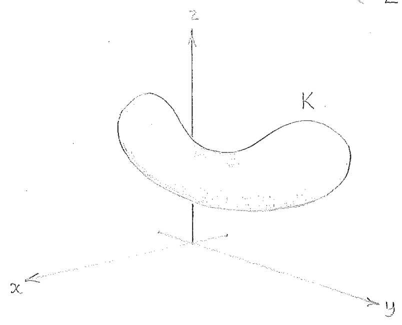
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

Övning 1: Skriv $\iiint_D (xy + \sin z^2)\,dx\,dy\,dz$, där D är rätblocket $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 3$ som en upprepad enkelintegral.

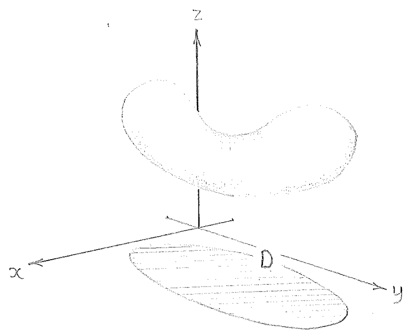
Enkla områden i z-led

Ett område som ligger mellan två funktionsytor i y-led kallas för enkelt i z-led och kan beskrivas som

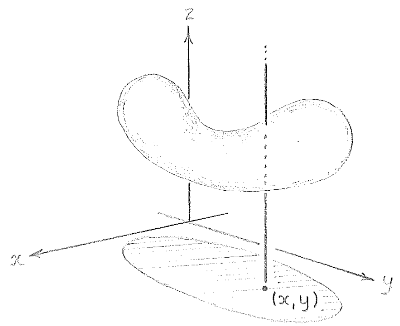
$$\begin{cases} (x,y) \in D \\ z: a(x,y) \to b(x,y) \end{cases}$$



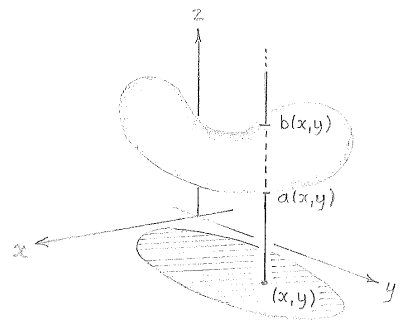
① Vi ska undersöka om kroppen K är enkel i z-led.



② Projicera ner alla punkter i K på xy-planet. Då fås ett område D.



③ Genom varje (x,y) i D drar vi en linje parallell med z-axeln.



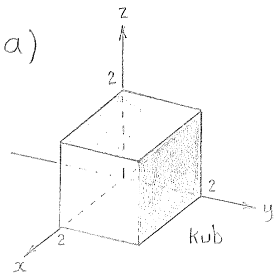
④ Om linjens skärning med K är ett sammanhängande intervall

$$a(x,y) \leq z \leq b(x,y)$$

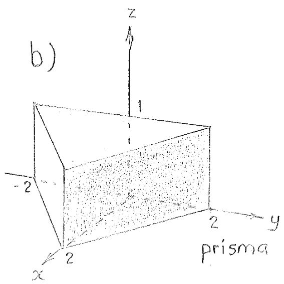
då är K enkel i z-led.

Övning 2: Rita ut projektionen av området på xy-planet och ange om området är enkelt i z-led.

a)



b)



Övning 3: Beskriv ovanstående områden på formen

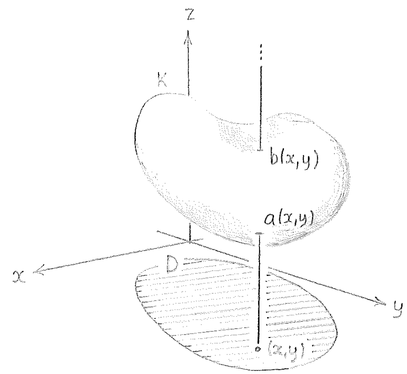
$$(x,y) \in D, \quad z: a(x,y) \to b(x,y).$$

a)

b)

Om $f(x,y,z)$ är kontinuerlig på det enkla området $K: \{ z: a(x,y) \to b(x,y) \text{ när } (x,y) \in D \}$, då är

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$



Ofta skriver man den upprepade integralen som

$$\iint_D dx\,dy \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Exempel 1: Beräkna

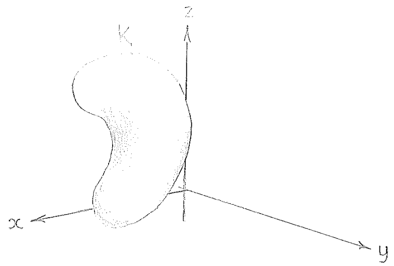
$$\iiint_K (1+z)\,dx\,dy\,dz$$

där K är området i övning 2b.

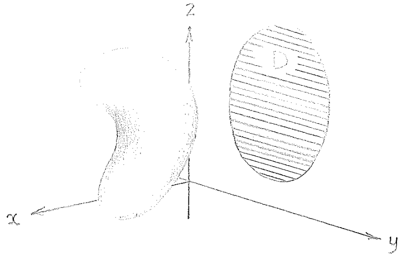
Enkla områden i x- och y-led

Ett område som ligger mellan två funktionsytor i x-led kallas för enkelt i x-led och kan beskrivas som

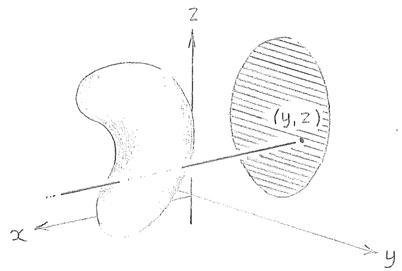
$$\begin{cases} (y,z) \in D \\ x : a(y,z) \to b(y,z) \end{cases}$$



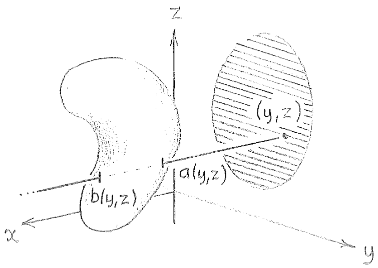
(1) Vi ska undersöka om kroppen K är enkel i x-led.



(2) Projicera alla punkter i K på yz-planet. Då fås ett område D.



(3) Genom varje (y,z) i D drar vi en linje parallell med x-axeln.



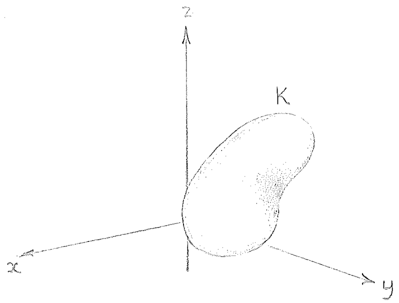
(4) Om linjens skärning med K är ett sammanhängande intervall

$$a(y,z) \leq x \leq b(y,z)$$

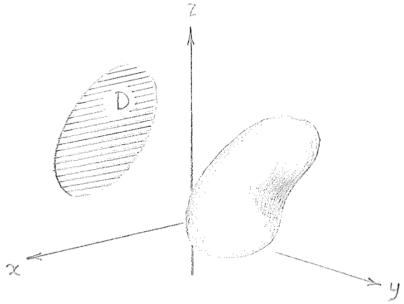
då är K enkel i x-led.

Ett område som ligger mellan två funktions-ytor i y-led kallas för enkelt i y-led och kan beskrivas som

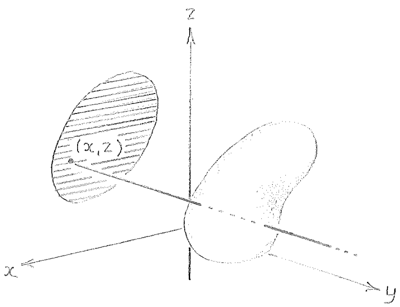
$$\begin{cases} (x,z) \in D \\ y:\ a(x,z) \to b(x,z) \end{cases}$$



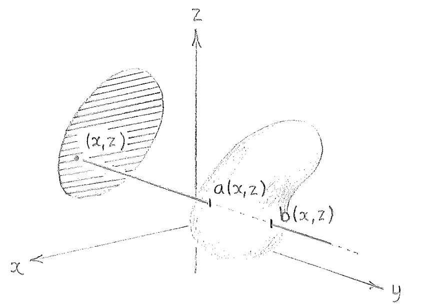
① Vi ska undersöka om kroppen K är enkel i y-led.



② Projicera alla punkter i K på xz-planet. Då fås ett område D.



③ Genom varje (x,z) i D drar vi en linje parallell med y-axeln.



④ Om linjens skärning med K är ett sammanhängande intervall

$$a(x,z) \le y \le b(x,z)$$

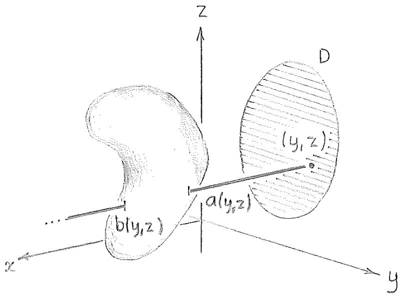
då är K enkel i y-led.

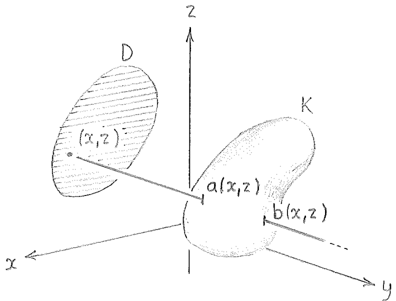
Om $f(x,y,z)$ är kontinuerlig på det enkla området $K:\{x: a(y,z) \to b(y,z)$ när $(y,z) \in D\}$, då är

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{a(y,z)}^{b(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz.$$

För området $K:\{y: a(x,z) \to b(x,z)$ när $(x,z) \in D\}$, är

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{a(x,z)}^{b(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dx\,dz.$$





Ofta skriver man de upprepade integralerna som

$$\iint_D dy\,dz \int_{a(y,z)}^{b(y,z)} f(x,y,z)\,dx,$$

$$\iint_D dx\,dz \int_{a(x,z)}^{b(x,z)} f(x,y,z)\,dy.$$

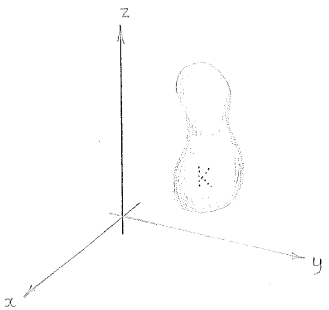
Exempel 2: Beräkna

$$\iiint_K (1+z)\,dx\,dy\,dz$$

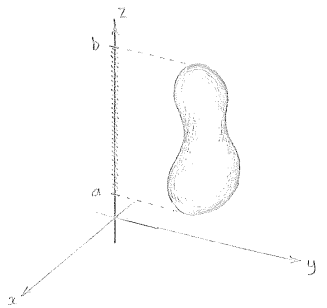
där K är området i övning 2b.

Snittning

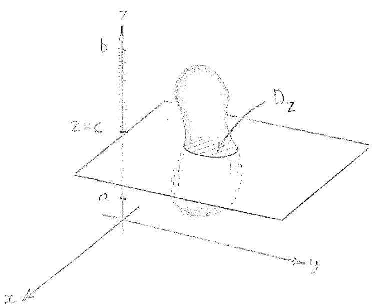
Ett sätt att beskriva en kropp är att välja en axel och skiva upp kroppen i snitt vinkelräta mot axeln.



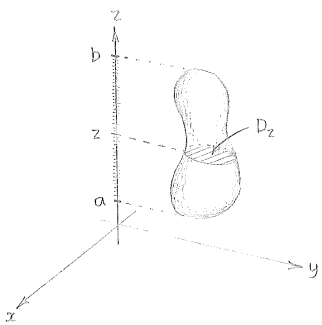
(1) Vi ska beskriva kroppen K genom snittning längs z-axeln.



(2) Projicera alla punkter i K på z-axeln. Då fås att K har utsträckningen $a \leq z \leq b$.



(3) För varje $z = c$ i $[a, b]$ bestämmer vi snittmängden D_c mellan kroppen och planet $z = c$.

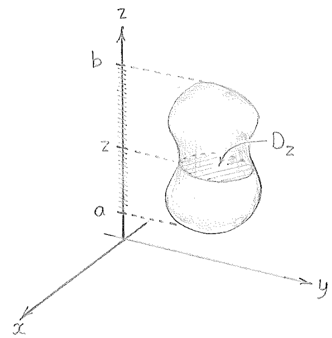


(4) Om snittmängden D_z kan uttryckas på ett analytiskt enkelt sätt, då kan kroppen K beskrivas som

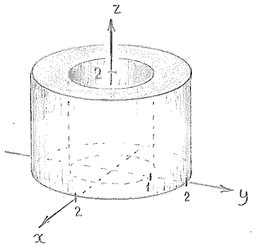
$$\begin{cases} z : a \to b \\ (x, y) \in D_z \end{cases}$$

Om $f(x,y,z)$ är kontinuerlig på snittområdet $K : \{ (x, y) \in D_z, \text{ när } z : a \to b \}$, då är

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$



Exempel 3: Beskriv området till höger genom snittning.



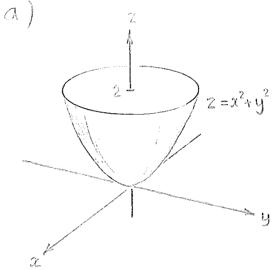
Exempel 4: Beräkna

$$\iiint_K \frac{dx\,dy\,dz}{1+z}$$

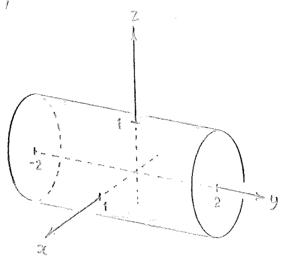
där $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Övning 4: Välj en lämplig axel och beskriv området genom snittning.

a)



b)



Exempel 5: Hur mycket energi krävs för att bygga en pyramid?