Föreläsning 17
- Några volymformler
  - Cylindriskt volymelement
  - Sfäriskt volymelement
  - Parallellepiped
- Variabelsubstitution
  - Cylindrisk substitution
  - Sfärisk substitution
  - Allmän substitution
- Symmetrier

Några volymformler

Cylindriskt volymelement

Volymen av cylinderelementet

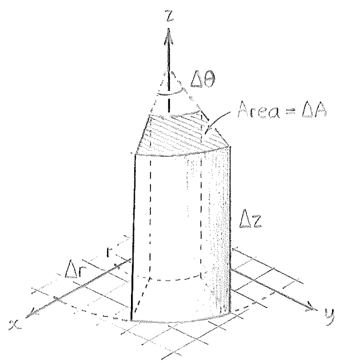
$$\{(r', \theta', z') : r \le r' \le r+\Delta r,\ \theta \le \theta' \le \theta + \Delta\theta,\ z \le z' \le z + \Delta z\},$$

där (r', θ', z') betecknar cylindriska koordinater, ges av

$$\text{Volym} = r\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta z + \tfrac{1}{2}(\Delta r)^2\,\Delta\theta\,\Delta z.$$

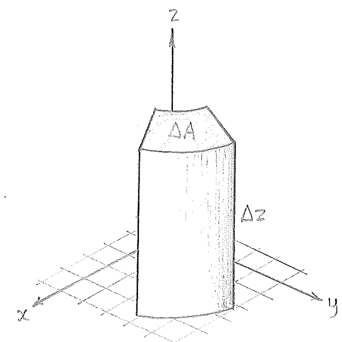
För små Δr, $\Delta\theta$ och Δz är

$$\text{Volym} = r\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta z + (\text{restterm}).$$



① Cylinderelementets basyta är en cirkelringssektor och har arean

$$\Delta A = r\,\Delta r\,\Delta\theta + \tfrac{1}{2}(\Delta r)^2\,\Delta\theta.$$



② Elementets volym är

$$\begin{aligned}\Delta V &= (\text{basarea})\cdot(\text{höjd}) \\ &= \Delta A \cdot \Delta z \\ &= r\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta z + \tfrac{1}{2}(\Delta r)^2\,\Delta\theta\,\Delta z.\end{aligned}$$

Sfäriskt volymelement

Volymen av det sfäriska elementet

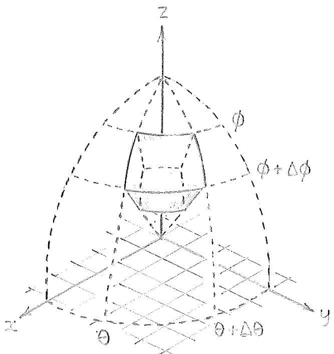
$$\{(r',\phi',\theta'):\ r\le r'\le r+\Delta r,\ \phi\le\phi'\le\phi+\Delta\phi,\ \theta\le\theta'\le\theta+\Delta\theta\},$$

där (r',ϕ',θ') betecknar sfäriska koordinater, ges av

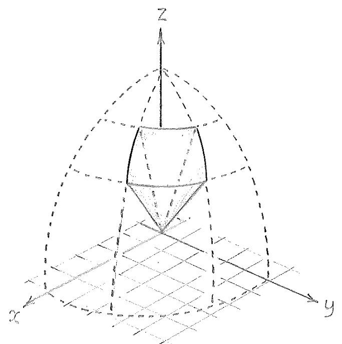
$$\text{Volym} = \tfrac{2}{3}\left[(r+\Delta r)^3 - r^3\right]\sin(\phi+\tfrac{1}{2}\Delta\phi)\sin(\tfrac{1}{2}\Delta\phi)\,\Delta\theta.$$

För små Δr, $\Delta\phi$ och $\Delta\theta$ är

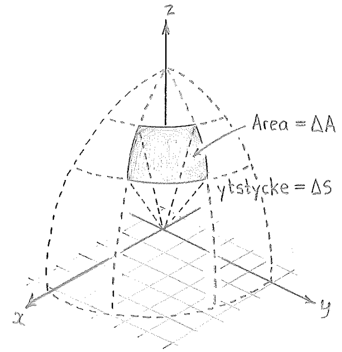
$$\text{Volym} = r^2\sin\phi\,\Delta r\,\Delta\phi\,\Delta\theta + (\text{restterm}).$$



(1) Vi söker volymen av ett sfäriskt element



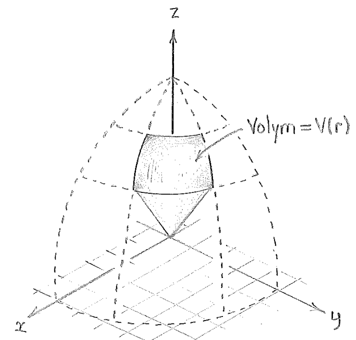
(2) Yi ska först bestämma volymen $\Delta V(r)$ av den sfäriska sektorn ovan som har radie r.



(3) Det första steget är att bestämma arean ΔA av sektorns sfäriska ytdel.

$$\Delta A = \iint_{\Delta S} dS = \iint_{\substack{\phi\le\phi'\le\phi+\Delta\phi\\ \theta\le\theta'\le\theta+\Delta\theta}} r^2\sin\phi'\,d\phi'\,d\theta = r^2(\cos\phi - \cos(\phi+\Delta\phi))\,\Delta\theta = 2r^2\sin(\phi+\tfrac{1}{2}\Delta\phi)\sin(\tfrac{1}{2}\Delta\phi)\,\Delta\theta$$

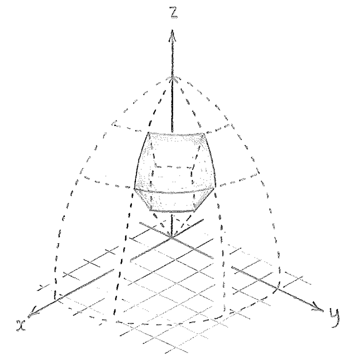
(4) Arean ΔA bestämmer vi med en areaintegral.



(5) Därefter kan vi bestämma sektorns volym.

$$V(r) = \frac{\Delta A}{(\text{klotets area})}\cdot(\text{klotets volym}) = \frac{\Delta A}{4\pi r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}r^3\sin(\phi+\tfrac{1}{2}\Delta\phi)\sin(\tfrac{1}{2}\Delta\phi)\,\Delta\theta$$

(6) Sektorns volymandel av klotet är lika med dess areaandel av sfären.



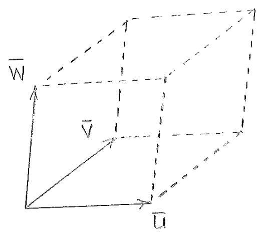
$$\text{Volym} = V(r+\Delta r) - V(r) = \tfrac{2}{3}\left[(r+\Delta r)^3 - r^3\right]\sin(\phi+\tfrac{1}{2}\Delta\phi)\sin(\tfrac{1}{2}\Delta\phi)\,\Delta\theta$$

(7) Nu kan vi bestämma det sfäriska elementets volym.

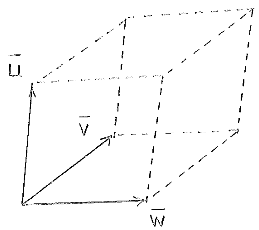
Parallellepiped

Volymen (med tecken) av den parallell-epiped som vektorerna $\bar{u}, \bar{v}$ och $\bar{w}$ spänner upp ges av

$$\text{Volym} = \pm \begin{vmatrix} | & | & | \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \\ | & | & | \end{vmatrix}.$$

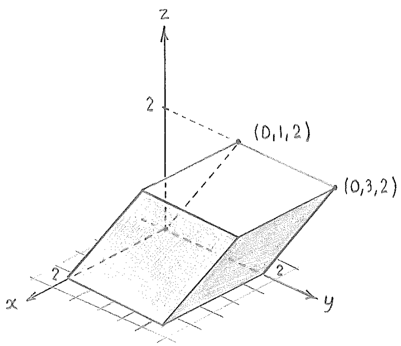


Vektorerna $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ är höger-handsorienterade och volymen är determinanten med plustecken.



Vektorerna $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ är vänster-handsorienterade och volymen är determinanten med minustecken.

Övning 1: Skriv upp en determinantformel för epipedens volym.

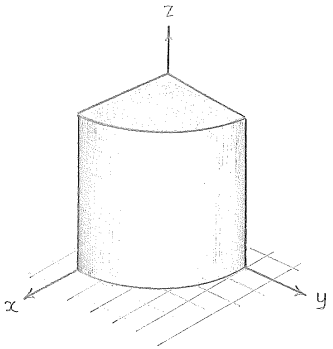


Variabelsubstitution

Cylindrisk substitution

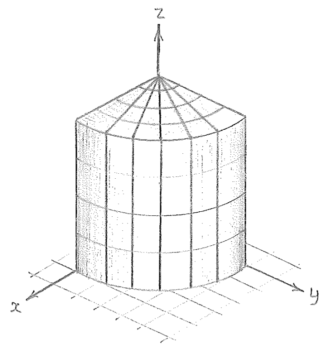
Vid byte till cylindriska koordinater ändras en trippelintegral enligt formeln

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\; r\,dr\,d\theta\,dz.$$

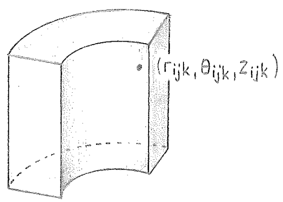


(1) Vi ska bestämma

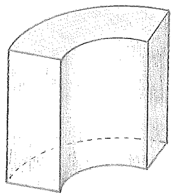
$$V = \iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$



(2) Partitionera K i cylindriska delelement K_{ijk} genom att dela in r-, θ- och z-intervallen.



(3) I varje K_{ijk} väljer vi en punkt $(r_{ijk}, \theta_{ijk}, z_{ijk})$.



$$\Delta V_{ijk} \approx f(r_{ijk}\cos\theta_{ijk}, r_{ijk}\sin\theta_{ijk}, z_{ijk}) \times (r_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j\,\Delta z_k + \text{R.T.})$$

(4) Elementet K_{ijk}:s bidrag ΔV_{ijk} till trippelintegralens värde är approximativt

$$\Delta V_{ijk} \approx (f\text{:s värde i } (r_{ijk}, \theta_{ijk}, z_{ijk})) \times (\text{elementets volym}).$$

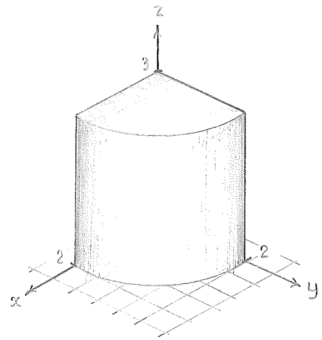
$$V \approx \sum f(r_{ijk}\cos\theta_{ijk}, r_{ijk}\sin\theta_{ijk}, z_{ijk}) \times r_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j\,\Delta z_k + \text{R.T.}$$

(5) Summan över alla delelement är en Riemannsumma.

$$V = \iiint_K f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

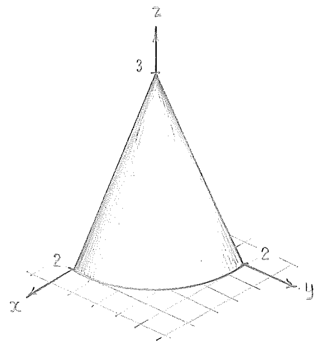
(6) Riemannsumman konvergerar mot en trippelintegral.

Övning 2: Skriv integralerna efter en cylindrisk substitution.



En fjärdedels cylinder

$$\iiint_K x^2 z\,dx\,dy\,dz$$



En fjärdedels kon

$$\iiint_K 3y^2\,dx\,dy\,dz$$

Exempel 1: Beräkna

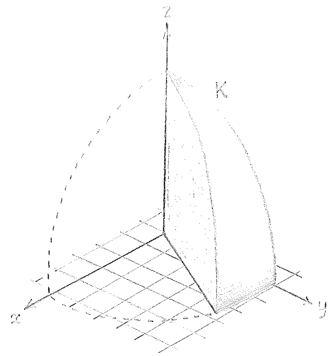
$$\iiint_K (x^2-y^2)z \, dx\,dy\,dz$$

där K: $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 2$.

Sfärisk substitution

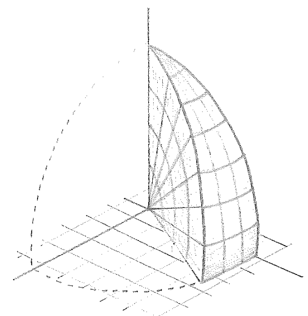
Vid byte till sfäriska koordinater ändras en trippelintegral enligt formeln

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K f(r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)\, r^2 \sin\phi \, dr\,d\phi\,d\theta.$$

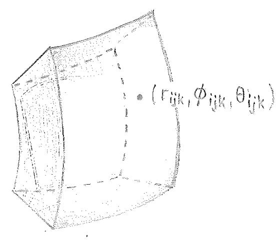


① Vi ska bestämma

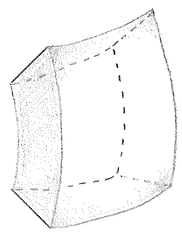
$$V = \iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$



② Partitionera K i sfäriska delelement K_{ijk} genom att dela in r-, ϕ- och θ-intervallen.



③ I varje K_{ijk} väljer vi en punkt $(r_{ijk}, \phi_{ijk}, \theta_{ijk})$.



$$\Delta V_{ijk} \approx f(r_{ijk}\sin\phi_{ijk}\cos\theta_{ijk},\ r_{ijk}\sin\phi_{ijk}\sin\theta_{ijk},\ r_{ijk}\cos\phi_{ijk}) \times (r_i^2 \sin\phi_j \,\Delta r_i \,\Delta\phi_j \,\Delta\theta_k + \text{R.T.})$$

④ Elementet K_{ijk}:s bidrag ΔV_{ijk} till trippelintegralens värde är approximativt

$\Delta V_{ijk} \approx$ (f:s värde i $(r_{ijk}, \phi_{ijk}, \theta_{ijk})$) $\times$ (elementets volym).

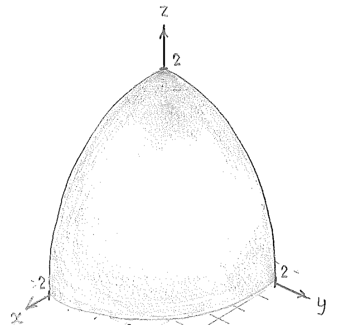
$V \approx \sum f(r_{ijk}\sin\phi_{ijk}\cos\theta_{ijk},$
$r_{ijk}\sin\phi_{ijk}\sin\theta_{ijk},\ r_{ijk}\cos\phi_{ijk})$
$\times\ r_i^2\sin\phi_j\,\Delta r_i\,\Delta\phi_j\,\Delta\theta_k + \text{R.T.}$

$$V = \iiint_K f(r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)\, r^2\sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$$

5 Summan över alla delelement är en Riemannsumma.

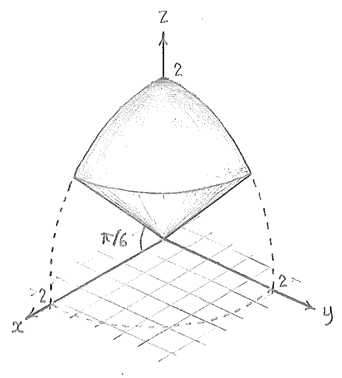
6 Riemannsumman konvergerar mot en trippelintegral.

Övning 3: Skriv integralerna efter en sfärisk substitution.



Åttondedels klot

$$\iiint_K (x^2+y^2)z\, dx\, dy\, dz$$



$$\iiint_K \frac{xy}{1+x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$$

Exempel 2: Beräkna

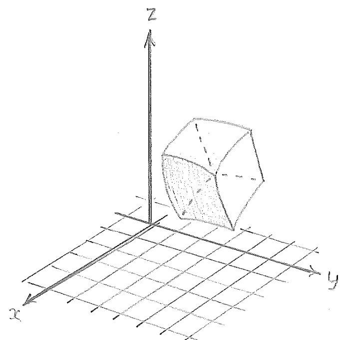
$$\iiint_K (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

där $K:\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4.$

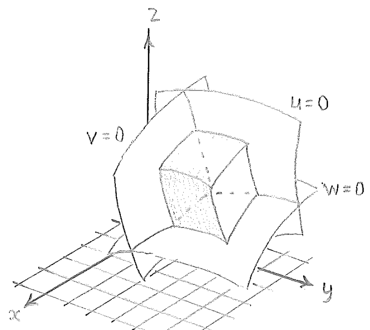
Allmän substitution

Vid byte till allmänna koordinater u, v, w ändras en trippelintegral enligt formeln

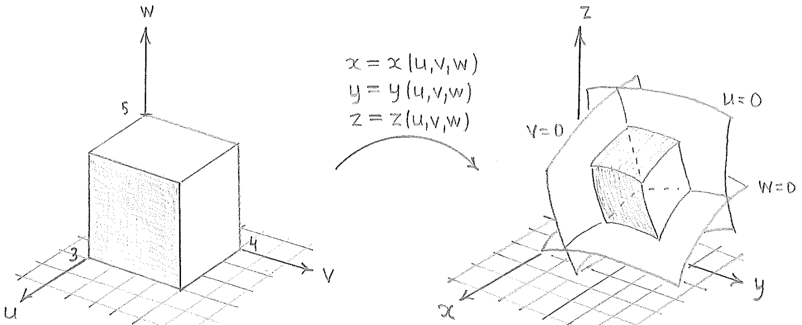
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw.$$



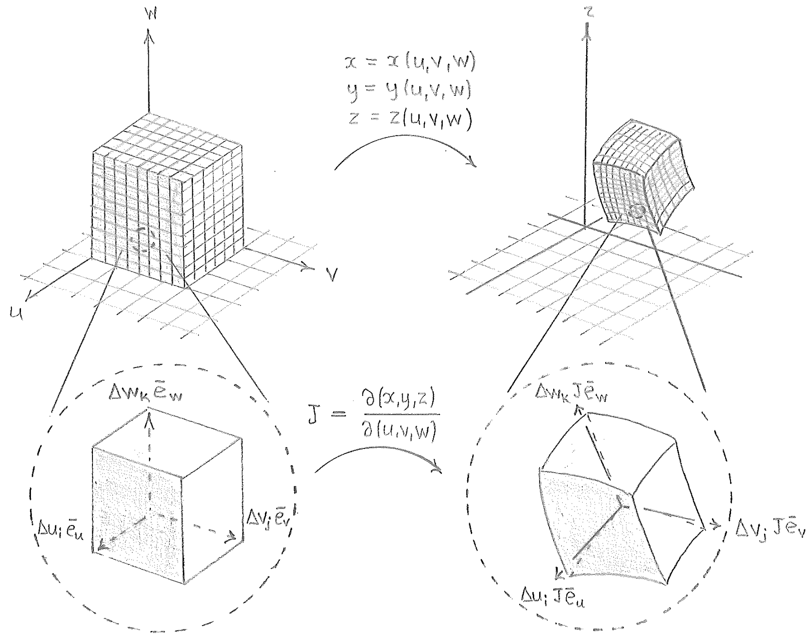
(1) Området D har en komplicerad beskrivning i x,y,z-koordinater.



(2) Området D har en enkel beskrivning i u,v,w-koordinater: $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 4$, $0 \le w \le 5$.



(3) Sambandet mellan parametrarna (u,v,w) och (x,y,z) kan uttryckas som en funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$.



(4) Partitionera parameterområdet $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 4$, $0 \le w \le 5$ med delrätblock och avbilda dessa till en partitionering av D. Varje delrätblock avbildas till en approximativ parallellepiped med den lokala linjära approximationen $J = \partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$ och parallellepipeden har volymen

$$\Delta V_{ijk} = \Delta u_i \Delta v_j \Delta w_k \left| \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ J\bar{e}_u & J\bar{e}_v & J\bar{e}_w \\ | & | & | \end{pmatrix} \right| = \Delta u_i \Delta v_j \Delta w_k \,|\det J|.$$

$$V \approx \sum f(x(u_i,v_j,w_k), y(u_i,v_j,w_k), z(u_i,v_j,w_k)) \times |\det J_{ijk}|\, \Delta u_i \Delta v_j \Delta w_k$$

(5) Trippelintegralens värde approximeras med en Riemannsumma.

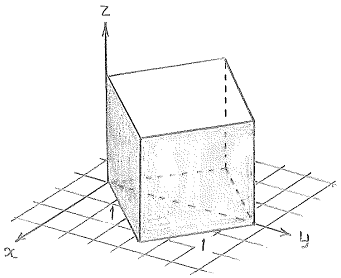
$$V = \iiint_D f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\, |\det J|\, du\,dv\,dw$$

(6) I gränsen konvergerar trippelintegralen mot ovanstående integral.

Exempel 3: Beräkna

$$\iiint_K (x^2-y^2)\,dx\,dy\,dz$$

där K är kuben i figuren till höger.



Exempel 4: Härled formeln för sfäriskt variabelbyte från den allmänna formeln.

Sambandet mellan (x,y,z) och (r,ϕ,θ) lyder

$$x = r\sin\phi\cos\theta$$
$$y = r\sin\phi\sin\theta$$
$$z = r\cos\phi$$

och därför är

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Funktionaldeterminanten beräknas genom att kofaktorutveckla längs tredje raden

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)} = \cos\phi\begin{vmatrix} r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} + r\sin\phi\begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^2\phi\sin\phi\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1} + r^2\sin^3\phi\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1}$$

$$= r^2\sin\phi\underbrace{(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}_{=1} = r^2\sin\phi.$$

Alltså är

$$dx\,dy\,dz = \left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}\right| dr\,d\phi\,d\theta = r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$$

och varialbytesformeln för trippelintegraler vid övergång till sfäriska koordinater följer från detta.

Symmetrier

Med hjälp av symmetrier kan uträkning av en del integraler förenklas.

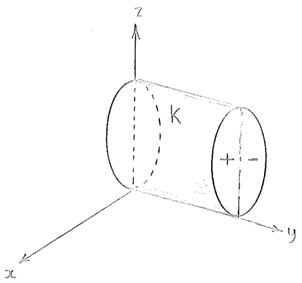
Udda funktioner

Om en funktion $f(x,y,z)$ är udda i x-led, dvs

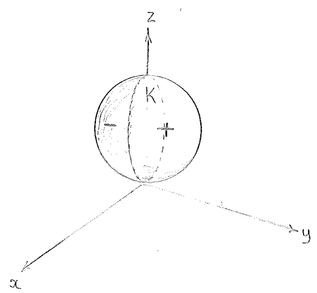
$$f(-x,y,z) = -f(x,y,z),$$

och integreras över ett område K som är symmetriskt i x-led kring $x=0$, då är

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0.$$



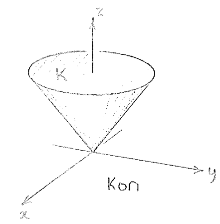
Integralen $\iiint_K x\,dx\,dy\,dz$ har värdet 0 eftersom integranden x är udda i x-led och K är symmetrisk i x-led kring $x=0$.



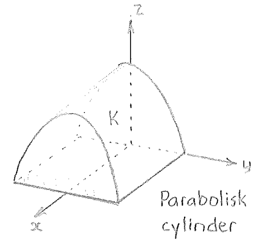
Integralen $\iiint_K \arctan y\,dx\,dy\,dz$ har värdet 0 eftersom integranden $\arctan y$ är udda i y-led och K är symmetrisk i y-led kring $y=0$.

Övning 4: Förklara varför nedanstående integraler har värdet 0.

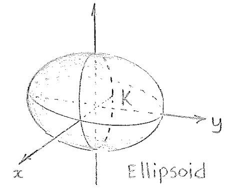
a) $\iiint_K xyz\,dx\,dy\,dz$



b) $\iiint_K x^2y^3z^4\,dx\,dy\,dz$



c) $\iiint_K (x^2y^2z+z)\,dx\,dy\,dz$



d) $\iiint_K \sqrt{x^3+y^3}\,dx\,dy\,dz$