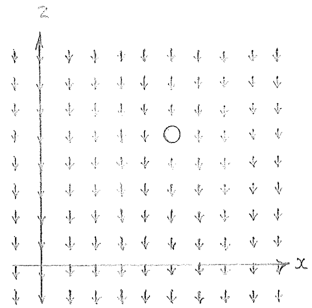
Föreläsning 18

- Vektorfält
- Kurvintegraler
  - Arbete
  - Definition
  - Vektoriellt bågelement
  - Exempel
  - Räkneregler

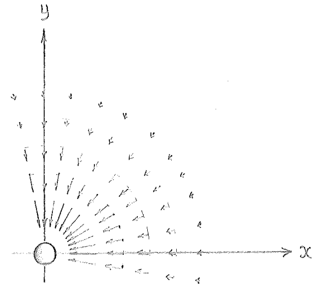
Vektorfält

Ett vektorfält $\bar{F}$ tillordnar till varje punkt $\bar{r}$ en vektor $\bar{F}(\bar{r})$.



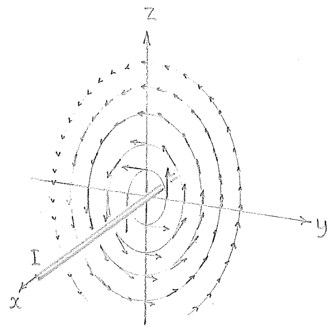
Tyngdkraftfält

$\bar{F} = -mg\bar{e}_z$



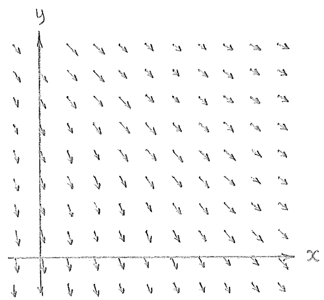
Elektriskt fält

$\bar{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\bar{r}$



Magnetiskt fält

$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y^2+z^2)}(y\bar{e}_z - z\bar{e}_y)$

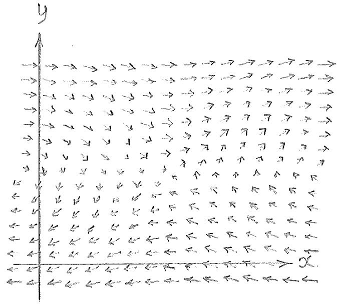


Hastighetsfält

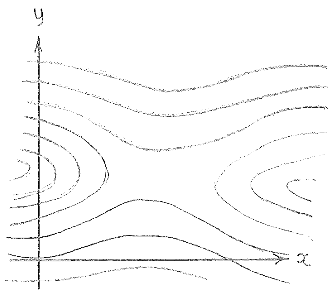
$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$.

Fältlinjer

En fältlinje till ett vektorfält är en kurva vars riktning i varje punkt sammanfaller med vektorfältets riktning.



Vektorfält



Fältlinjer

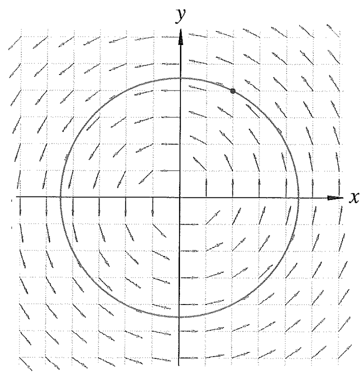
En kontinuerligt deriverbar parameterkurva $\bar{r} = \bar{r}(t)$ är en fältlinje till ett kontinuerligt deriverbart vektorfält $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$ om

$$\dot{\bar{r}}(t) \text{ är parallell med } \bar{F}(\bar{r}(t)).$$

Exempel 1: Bestäm fältlinjen till vektorfältet

$$\bar{F}(x,y) = (-y, x)$$

som går genom punkten $(1,2)$.



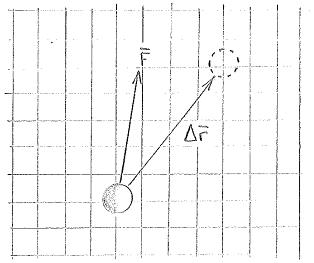
Det normerade vektorfältet $\bar{F} = (-y, x)$ och fältlinjen som går genom punkten $(1,2)$.

Kurvintegraler

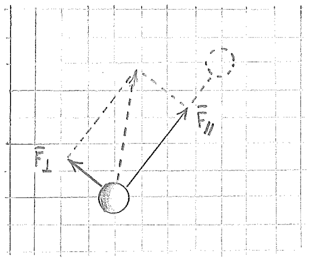
Arbete

Det arbete som en kraft $\bar{F}$ utför på en partikel som förflyttas sträckan $\Delta\bar{r}$ är

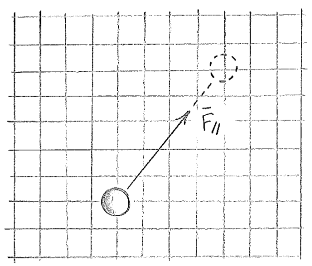
$$W = \bar{F} \cdot \Delta\bar{r}.$$



① Arbetet som utförs när partikeln förflyttas sträckan $\Delta\bar{r}$ av kraften $\bar{F}$ söks.

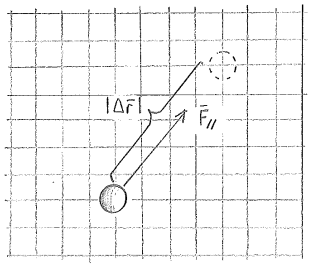


② Kraften $\bar{F}$ delas upp i en komposant $\bar{F}_{/\!/}$ parallell med förflyttningen och en vinkelrät komposant $\bar{F}_{\perp}$.



③ Den arbetande komposanten $\bar{F}_{/\!/}$ är projektionen av $\bar{F}$ på riktningen $\Delta\bar{r}$,

$$|\bar{F}_{/\!/}| = |\mathrm{proj}_{\Delta r} F| = \frac{\bar{F}\cdot\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|}$$



④ Arbetet som utförs är kraften gånger sträckan

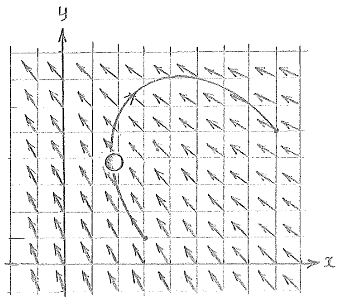
$$W = |\bar{F}_{/\!/}|\,|\Delta\bar{r}| = \frac{\bar{F}\cdot\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|}\,|\Delta r| = \bar{F}\cdot\Delta\bar{r}.$$

Det arbete som ett kraftfält $\bar{F}(\bar{r})$ utför på en partikel som rör sig längs den riktade kurvan

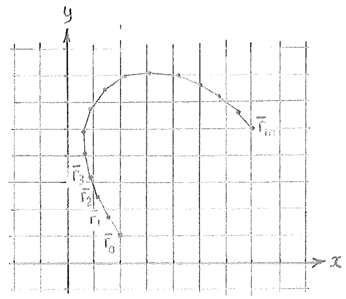
$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{där } t: a \to b,$$

ges av

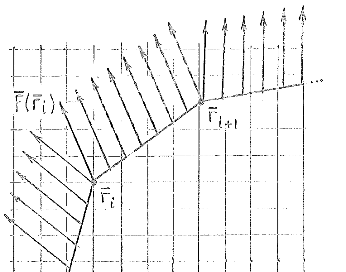
$$W = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \dot{\bar{r}}(t)\, dt.$$



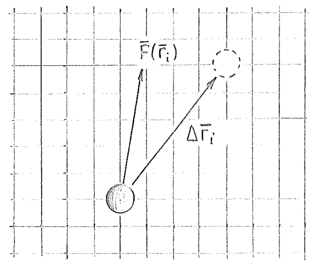
① Vi ska bestämma arbetet som kraftfältet utför på en partikel som rör sig längs kurvan.



② Dela in kurvan i räta linjestycken mellan punkterna $\bar{r}_i = \bar{r}(t_i)$.

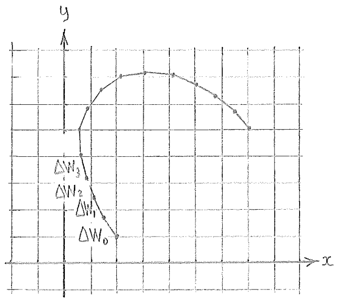


③ På ett linjestycke approximeras kraftfältet med kraftfältets värde $\bar{F}(\bar{r}_i)$ i ändpunkten $\bar{r}_i$.



④ Arbetet som utförs av den konstanta kraften $\bar{F}(\bar{r}_i)$ vid förflyttningen $\Delta\bar{r}_i = \bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i$ är

$$\Delta W_i = \bar{F}(\bar{r}_i) \cdot \Delta\bar{r}_i.$$



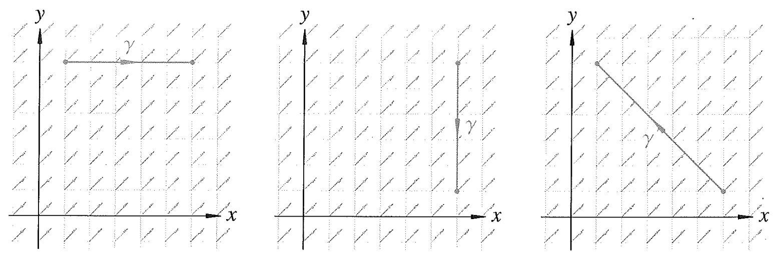
⑤ Det totala arbetet är approximativt

$$W = \sum_{i=0}^{m-1} \bar{F}(\bar{r}_i)\cdot\Delta\bar{r}_i .$$

$$W = \lim_{\substack{m\to\infty \\ |\Delta\bar{r}_i|\to 0}} \sum_{i=0}^{m-1} \bar{F}(\bar{r}_i)\cdot\Delta\bar{r}_i = \lim_{\substack{m\to\infty \\ |\Delta\bar{r}_i|\to 0}} \sum_{i=0}^{m-1} \bar{F}(\bar{r}_i)\cdot\frac{\Delta\bar{r}_i}{\Delta t_i}\,\Delta t_i = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\dot{\bar{r}}(t)\,dt$$

⑥ Summaformeln för arbetet är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

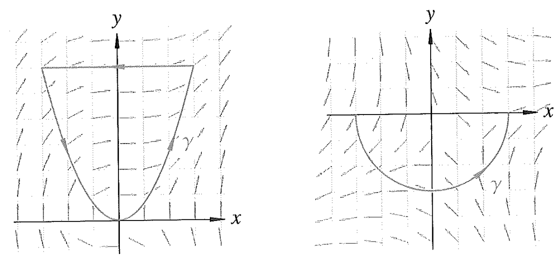
Övning 1: Bestäm det arbete som kraftfältet $\bar{F} = (1,1)$ utför på en partikel som rör sig längs kurvan γ.



Övning 2: Markera de delar av kurvan γ där arbetet

$$W = \int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

får ett positivt resp. negativt bidrag.



Definition

Om $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$ är ett kontinuerligt vektorfält och γ är en riktad kontinuerligt deriverbar kurva, då definieras kurvintegralen

$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\dot{\bar{r}}(t)\,dt$$

där $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t: a\to b$ är en kontinuerligt deriverbar parametrisering av γ.

Kurvintegralens värde är oberoende av hur kurvan γ parametriseras.

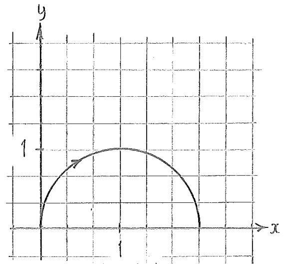
Vektoriellt bågelement

Uttrycket

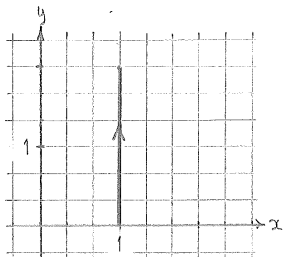
$$d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt}\,dt = \dot{\bar{r}}(t)\,dt = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt$$

kallas för det vektoriella bågelementet.

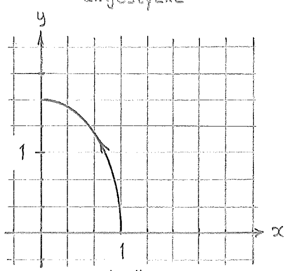
Övning 3: Bestäm en parametrisering och det vektoriella bågelementet.



Halvcirkel



Linjestycke



Kvartsellips

Olika beteckningar

Om vi sätter $\bar{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ och $d\bar{r} = (dx, dy)$ då kan kurvintegraler även skrivas som

$$\int_\gamma \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = \int_\gamma (P(x,y), Q(x,y))\cdot(dx,dy)$$

$$= \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

I rummet har vi

$$\int_\gamma \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = \int_\gamma (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))\cdot(dx,dy,dz)$$

$$= \int_\gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Övning 4: Avläs vektorfältet $\bar{F}$ från kurvintegralerna.

a) $\int_\gamma xy^2\,dx - y\,dy$

b) $\int_\gamma dy - x\,dx$

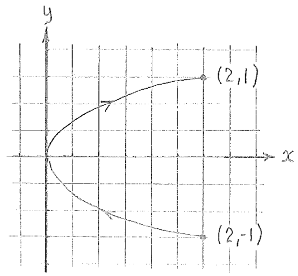
c) $\int_\gamma xy\,dy$

Exempel

Exempel 2: Beräkna

$$\int_\gamma xy\,dx + x^2 dy$$

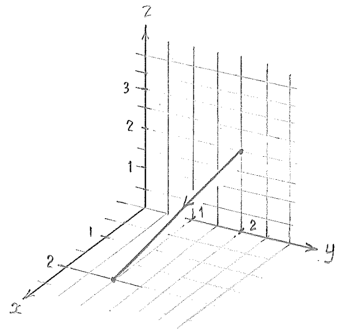
där γ är parabeln till höger.



Exempel 3: Beräkna

$$\int_\gamma (2x-y)\,dx + (-x+2y)\,dy + (2x-z)\,dz$$

där γ är linjestycket nedan.



Räkneregler

Om $\bar{F}$ och $\bar{G}$ är kontinuerliga vektorfält, a och b är konstanter och γ_1 och γ_2 är kontinuerligt deriverbara riktade kurvor, då är

1. $$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\gamma_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} + \int_{\gamma_2} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

2. $$\int_{-\gamma_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\int_{\gamma_1} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

3. $$\int_{\gamma_1} (a\bar{F}+b\bar{G})\cdot d\bar{r} = a\int_{\gamma_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} + b\int_{\gamma_1} \bar{G}\cdot d\bar{r}$$

Exempel 4: Beräkna

$$\int_{\gamma} x\,dy$$

där γ är kurvan till höger.