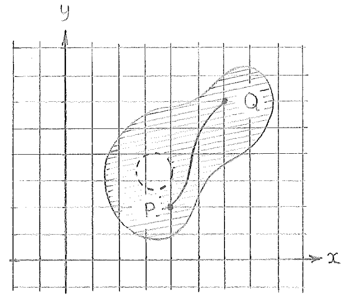
Föreläsning 19

- Topologiska begrepp
  - Sammanhängande områden
  - Enkelt sammanhängande områden
- Konservativa vektorfält
  - Potentialformeln
  - Kriterium för konservativa fält
  - Sammanfattning

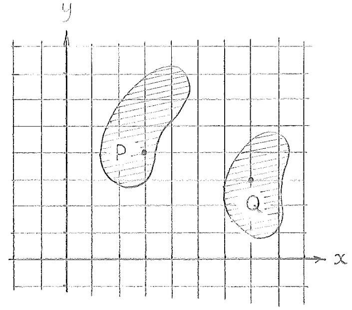
Topologiska begrepp

Sammanhängande områden

Ett område D är sammanhängande om varje par av punkter i D kan förbindas med en kurva som ligger helt i D.

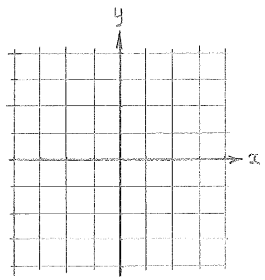


Ett sammanhängande område

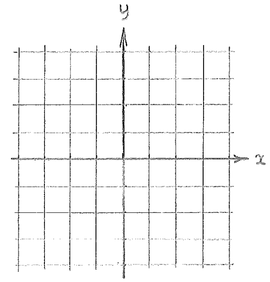


Ej sammanhängande område

Övning 1: Skissera områdena och avgör om de är sammanhängande.



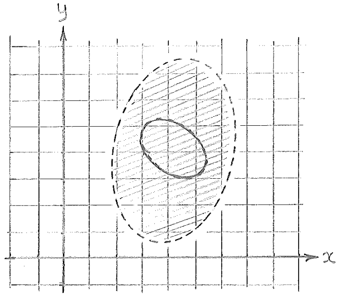
$D = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 \geq 1\}$



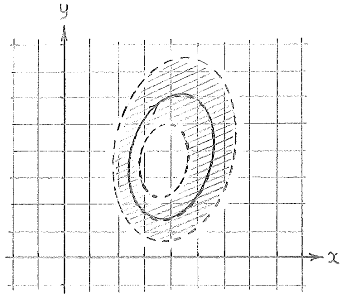
$D = \{(x,y) : xy > 1\}$

Enkelt sammanhängande områden

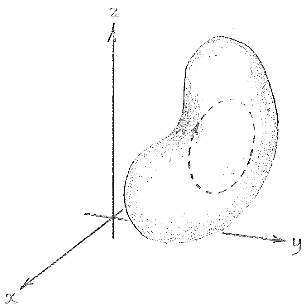
Ett öppet område D är enkelt sammanhängande om det är sammanhängande och varje sluten kurva i D kan deformeras inuti D till en punkt i D.



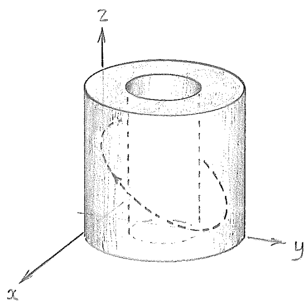
Ett enkelt sammanhängande område



Ej enkelt sammanhängande område

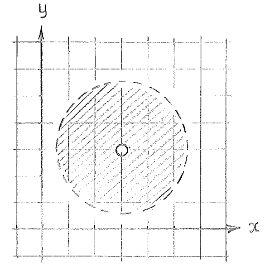


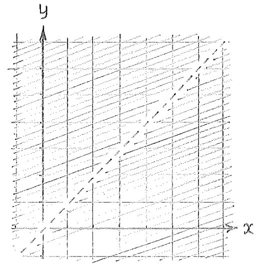
Ett enkelt sammanhängande område.

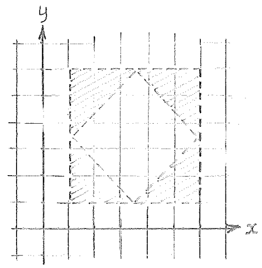


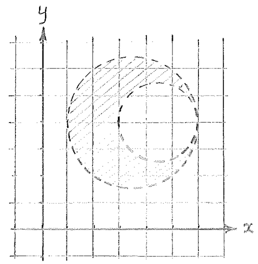
Ej enkelt sammanhängande område.

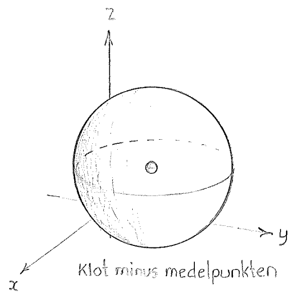
Övning 2: Vilka av områdena är enkelt sammanhängande?



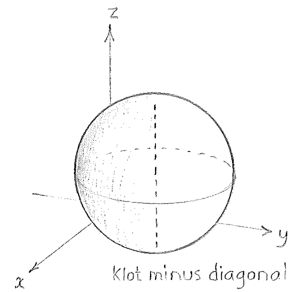




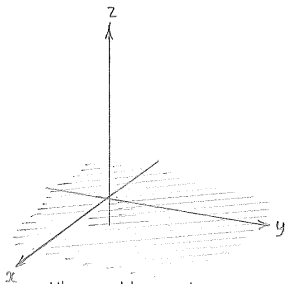




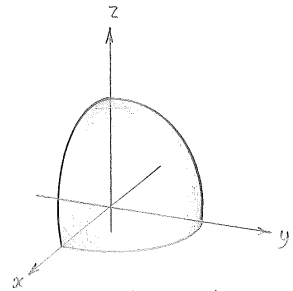
Klot minus medelpunkten



Klot minus diagonal



Alla punkter under xy-planet



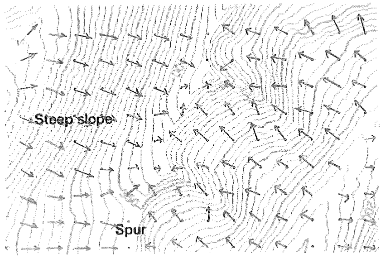
Enhetsklotet i första oktanten.

Konservativa vektorfält

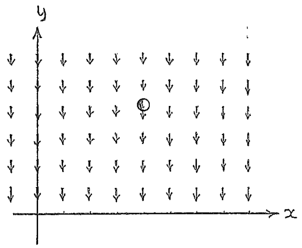
Ett konservativt vektorfält $\bar{F}$ är ett vektorfält som är förändringsfältet till en underliggande skalär storhet U,

$$\bar{F} = \nabla U.$$

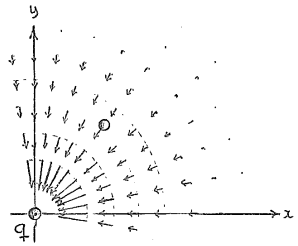
Storheten U kallas för en potential till vektorfältet.



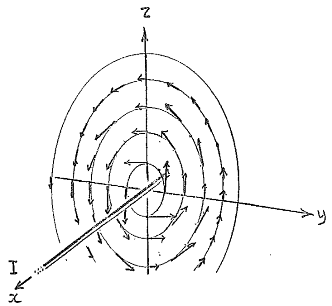
Det vektorfält på en karta som i varje punkt pekar i den riktning markhöjden ökar som mest och vars belopp anger ökningstakten är konservativt med höjden över havet som potential.



Tyngdkraftfältet är konservativt med den potentiella energin som potential.



Det elektriska fältet $\bar{E}$ som omger en laddning q är konservativt med den elektriska potentialen V som potential.



Det magnetiska fältet $\bar{B}$ kring en elektrisk ledare är inte konservativt.

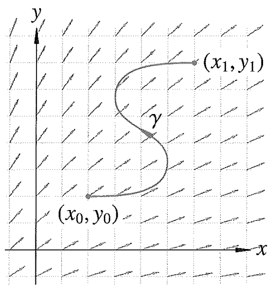
Exempel 2: Bestäm en potential till det konservativa vektorfältet

$$\bar{F} = (y^3 + 3x^2y^2,\ 3xy^2 + 2x^3y).$$

Potentialformeln

Om $\bar{F}$ är ett konservativt vektorfält med potential U och γ är en riktad kurva från startpunkten (x_0, y_0) till slutpunkten (x_1, y_1), då är

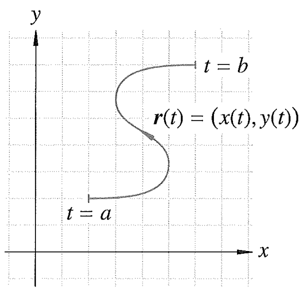
$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0).$$



Vi har ett gradientfält

$$\bar{F} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

och en kurva γ från (x_0, y_0) till (x_1, y_1).



Parametrisera γ

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t : a \to b$$

Då är $d\bar{r} = (\dot{x}, \dot{y})\,dt$.

Bevis:

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \nabla U \cdot d\bar{r} = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) \cdot (\dot{x}, \dot{y})\,dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}\right) dt = \{\text{ Kedjeregeln }\}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t))\,dt = \{\text{ Huvudsatsen }\}$$

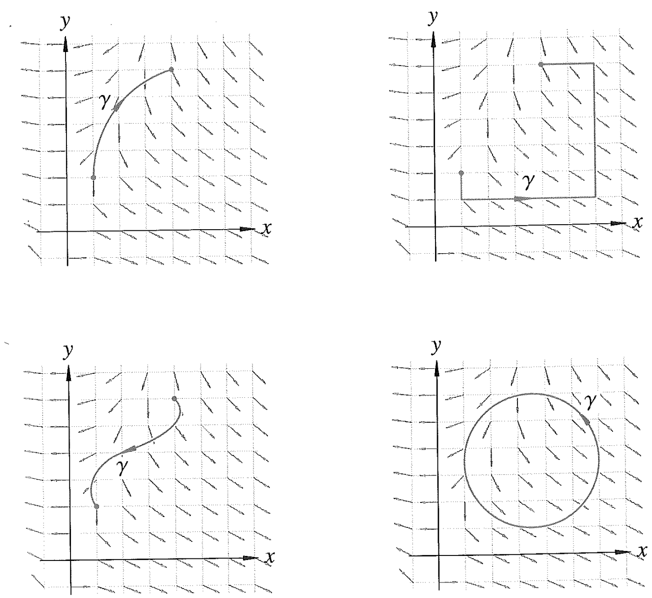
$$= \Big[\, U(x(t)) \,\Big]_{t=a}^{t=b} = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)).$$

Notera hur formeln

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0)$$

medför att kurvintegralens värde är oberoende av kurvan γ:s form och bara beror på start- och slutpunkten.

Övning 3: Det konservativa fältet $\bar{F} = (2x - y, -x)$ har potentialen $U = x^2 - xy$. Bestäm $\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r}$ för kurvorna nedan.



Exempel 3: Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (y^3+3x^2y^2)\,dx + (3xy^2+2x^3y)\,dy$$

där γ är kvartscirkelbågen från $(0,-2)$ till $(-2,0)$ med medelpunkt i origo.

Kriterium för konservativa fält

Ett nödvändigt villkor för att ett kontinuerligt deriverbart vektorfält är konservativt är att dess funktionalmatris är symmetrisk,

$$\bar{F} \text{ konservativt } \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \text{ symmetrisk.}$$

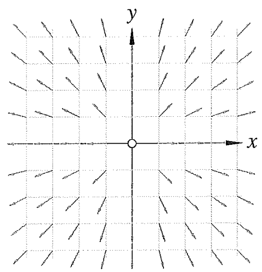
Bevis: Om U är en potential till $\bar{F}$, då är $\bar{F} = \nabla U = (U'_x, U'_y)$ och eftersom $U''_{xy} = U''_{yx}$ så är

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(U'_x, U'_y)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} \\ U''_{yx} & U''_{yy} \end{pmatrix}$$

symmetrisk.

Observera att

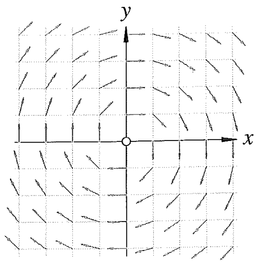
$$\bar{F} \text{ konservativt } \not\Leftarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \text{ symmetrisk.}$$



Vektorfältet

$$\bar{F} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(x,y), \quad (x,y) \neq \bar{0},$$

har symmetrisk funktionalmatris och är konservativt.



Vektorfältet

$$\bar{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(y,-x), \quad (x,y) \neq \bar{0},$$

har symmetrisk funktionalmatris men är ej konservativt.

Om området där vektorfältet är definierat är enkelt sammanhängande då gäller dock

$$\bar{F} \text{ konservativt} \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \text{ symmetrisk.}$$

Övning 4: Undersök vilka vektorfält som är konservativa med hjälp av funktionalmatrisen.

a) $\bar{F} = (2x \ln y, x^2/y)$
i området $\{(x,y) : y > 0\}$.

b) $\bar{F} = (x \ln(x^2+y^2), y \ln(x^2+y^2))$
i området $\{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$

c) $\bar{F} = (2xy, x^2+2yz, y^2-2z)$
i hela $\mathbb{R}^3$.

d) $F = (2xy, x^2+2yz, y^2-2z)$
i området $\{(x,y,z) : 1 < x^2+y^2\}$.

Exempel 4: Beräkna

$$\int_\gamma 2xy\,dx + (x^2+2yz)\,dy + (y^2-2z)\,dz$$

där γ är kurvan $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ från $(1,0,0)$ till $(-1,0,\pi)$.

Exempel 5: Beräkna

$$\int_\gamma (3y+2\sin(2x-y))\,dx + (3x-\sin(2x-y))\,dy.$$

längs parabeln $y=2x^2$ från $(0,0)$ till $(1,2)$.

Sammanfattning

Resultaten för konservativa vektorfält kan sammanfattas med följande punkter

(1) F är konservativt i området D

(2) $\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r}$ är oberoende av γ:s utseende i området D utan beror bara på start- och slutpunkten.

(3) $\oint_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ för alla slutna kurvor γ i området D.

(4) $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}}$ är symmetrisk i området D.

Om området D är sammanhängande, då är

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (4).$$

Om området D är enkelt sammanhängande, då är

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4).$$