Föreläsning 20

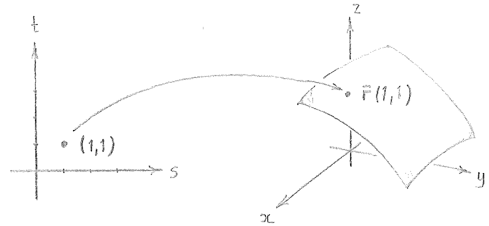
- Parameterytor
- Area av buktiga ytor
  - Area av ett parallellogram
  - Area av en parameteryta
  - Areaelementet dS
  - Några vanliga ytor

Parameterytor

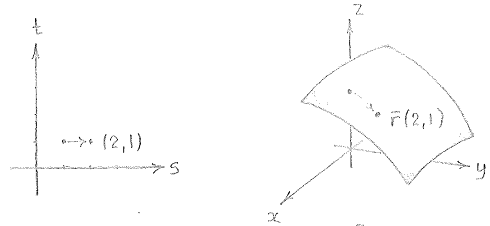
En yta i rummet där x-, y- och z-koordinaterna styrs av två parametrar s och t,

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases} \quad \text{alternativt} \quad \bar{r}(s,t) = (x(s,t),\, y(s,t),\, z(s,t)),$$

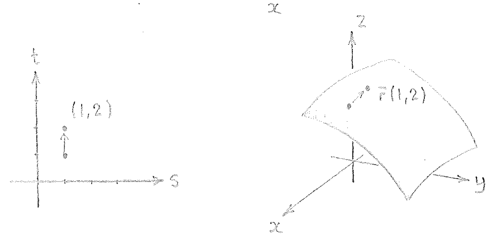
kallas för en parameteryta.



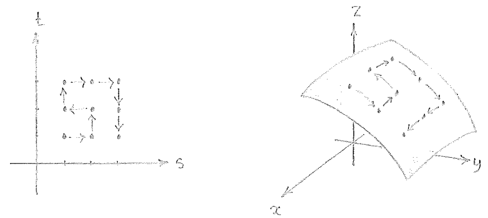
Parameterparet $(s,t) = (1,1)$ ger punkten $\bar{r}(1,1) = (x(1,1), y(1,1), z(1,1))$ på parameterytan.



När parametern $s=1$ flyttas till $s=2$ rör sig punkten på ytan i en riktning till punkten $(x(2,1), y(2,1), z(2,1))$.



Om istället parametern $t=1$ flyttas till $t=2$ rör sig punkten i en annan riktning till $(x(1,2), y(1,2), z(1,2))$.



Låter vi (s,t) variera över parameterområdet kommer $\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ genomlöpa ytan.

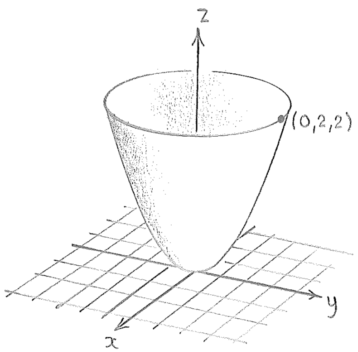
Övning 1: Givet parameterytan

$$\bar{r}(s,t) = (s^2 - t^2,\ s^2 + t^2,\ s + t)$$

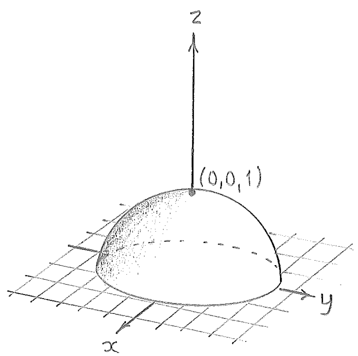
a) Vilken punkt på ytan svarar mot $(s,t) = (1,1)$?

b) Vilket (s,t) svarar mot punkten $(0,8,0)$ på ytan?

Exempel 1: Parametrisera ytorna nedan och ange parameterområdet.

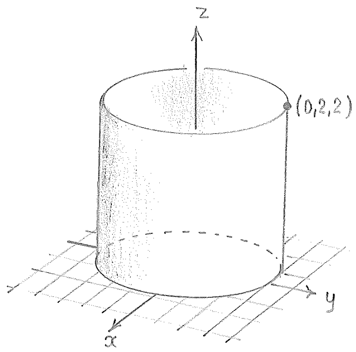


Paraboloid

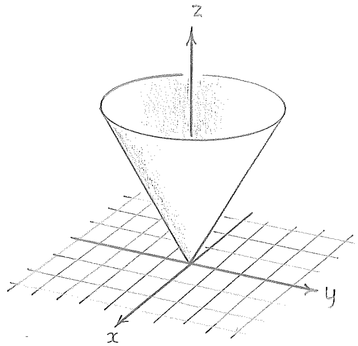


Halvsfär

Övning 2: Parametrisera ytorna nedan och ange parameterområdet.



Cylindriskt skal



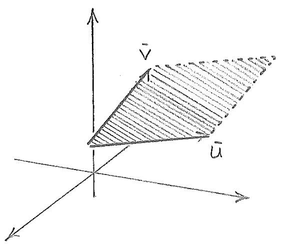
Koniskt skal

Area av buktiga ytor

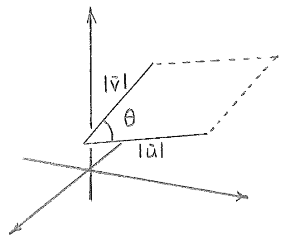
Area av ett parallellogram

Ett parallellogram som har kantvektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ har arean

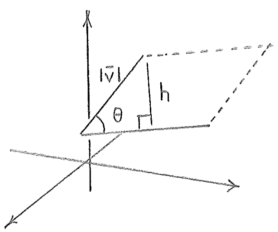
$$\text{Area} = |\bar{u} \times \bar{v}|.$$



① Vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är kanter till parallellogrammet.

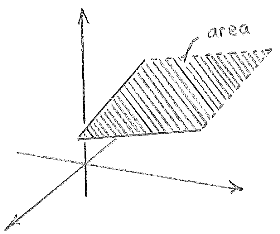


② Antag att vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är θ.



③ Om $\bar{u}$ väljs som bas är parallellogrammets höjd

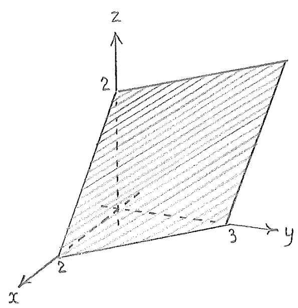
$$h = |\bar{v}| \sin\theta$$

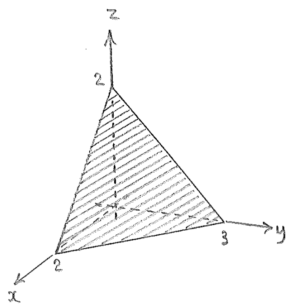


④ Arean ges av

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{bas} \cdot \text{höjd} \\ &= |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \sin\theta \\ &= |\bar{u} \times \bar{v}|. \end{aligned}$$

Övning 3: Bestäm arean av parallellogrammet resp. triangeln.





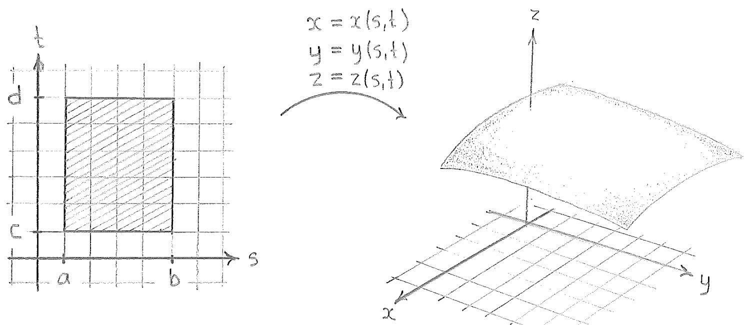
Area av en parameteryta

En kontinuerligt deriverbar parameteryta

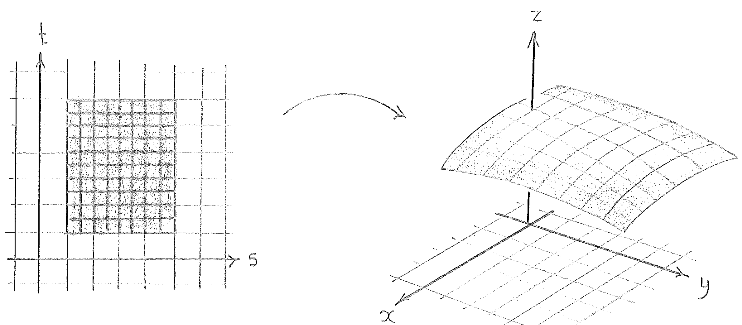
$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), \quad \text{där } (s,t) \in D,$$

har arean

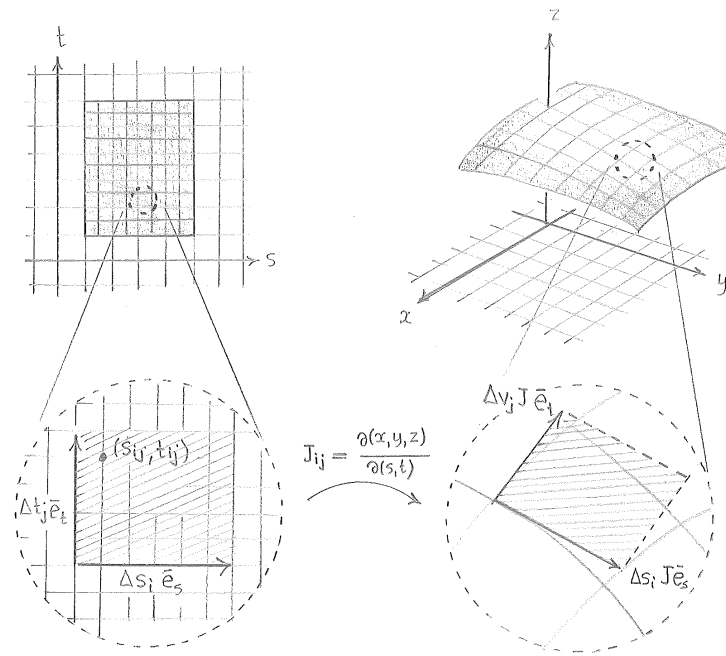
$$A = \iint_D \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\,dt.$$



(1) Vi ska bestämma arean av parameterytan $r(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ där parameterområdet är $D: a \leq s \leq b,\ c \leq t \leq d$.



(2) Partitionerna parameterområdet $a \leq s \leq b$, $c \leq t \leq d$ med delrektanglar och avbilda dessa till en partitionering av ytan.



(3) Varje delrektangel avbildas med den lokala linjära approximationen

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} x'_s & x'_t \\ y'_s & y'_t \\ z'_s & z'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \\ | & | \end{pmatrix}$$

till ett parallellogram med kantvektorer $\Delta u_i J e_s = \Delta u_i \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}$ och $\Delta v_j J \bar{e}_t = \Delta v_j \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$. Arean av parallellogrammet är

$$\Delta A_{ij} = \Delta u_i \Delta v_j \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right|.$$

$$A \approx \sum \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| \Delta s_i \Delta t_j$$

(4) Ytans totala area är approximativt summan av delparallellogrammens areor.

$$A = \iint_D \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\,dt$$

(5) Summan för arean är en Riemansumma som konvergerar mot ovanstående integral.

Areaelementet dS

Uttrycket

$$dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\, dt$$

kallas för areaelementet.

Arean av ytan S ges då av

$$\text{Area} = \iint_S dS = \iint_D \left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right| ds\, dt,$$

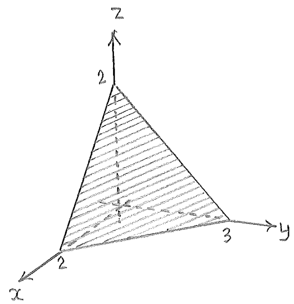
där $r(s,t)$ är en parametrisering av S och D är parameterområdet.

Exempel 2: Bestäm arean av ytan

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \\ z = u^2 - 2uv - v^2 \end{cases}$$

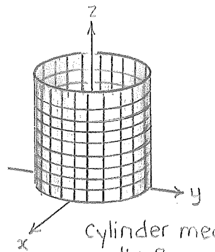
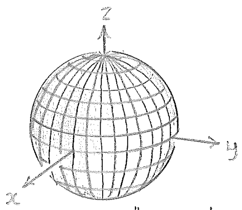
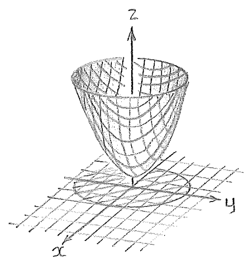
där $u^2 + v^2 < 2$ och $u - v > 0$.

Exempel 3: Bestäm arean av triangeln.



Areaelementet för några vanliga ytor

Tabellen nedan sammanfattar areaelementet för några vanliga typer av ytor.

Yta	Parametrisering	Areaelement
 Cylinder med radie R	$\bar{r}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$	$dS = R\,d\theta\,dz$
 Sfär med radie R	$\bar{r}(\phi, \theta) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$	$dS = R^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$
 Funktionsyta $z = f(x,y)$	$\bar{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$	$dS = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\,dx\,dy$

Exempel 4: Beräkna arean av den hyperboliska paraboloiden

$$z = xy$$

inuti cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$.