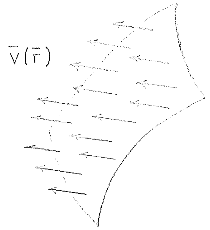
Föreläsning 21

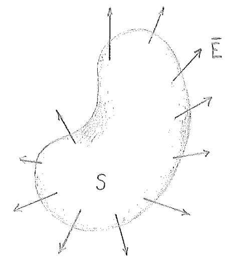
- Ytbegrepp
  - Orienterade ytor
  - Utåtriktad normal
- Flöde genom ytor
  - Flöde genom ett parallellogram
  - Flöde genom en parameteryta
  - Några vanliga ytor
- Räkneregler

Exempel på flödesintegraler



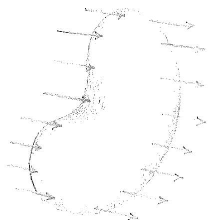
En vätska flödar i rummet med hastighetsfältet $\bar{v}(\bar{r})$. Det totala flödet genom ett ytstycke S ges av

$$\Phi = \iint_S \bar{v}(\bar{r}) \cdot d\bar{S}.$$



Totalladdningen innanför en sluten yta S fås med Gauss lag

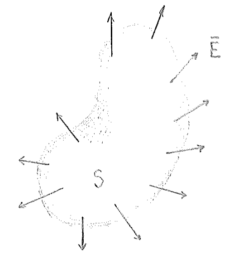
$$Q = \varepsilon_0 \iint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}.$$



Eftersom det inte finns magnetiska monopoler så är

$$\iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

där S är en sluten yta.



Totalkraften på en fast kropp i vakuum i ett $\bar{E}$-fält ges av

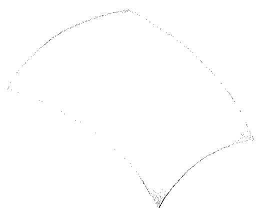
$$F = \iint_S \bar{T} \cdot d\bar{S}$$

där S är kroppens randyta och $\bar{T}$ är den maxwellska spänningen.

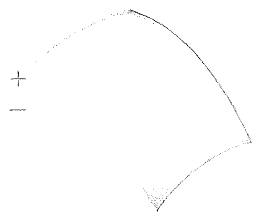
Ytbegrepp

Orienterade ytor

En yta är orienterad om den ges en in- och utsida.

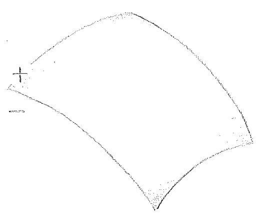


En icke-orienterad yta.

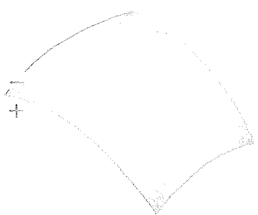


En orienterad yta (där + betecknar utsidan).

Om S är en orienterad yta, då betecknar −S samma yta men med omvänd orientering.



Den orienterade ytan S.



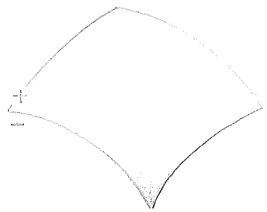
Den orienterade ytan −S.

Notera att alla ytor inte kan ges en orientering.

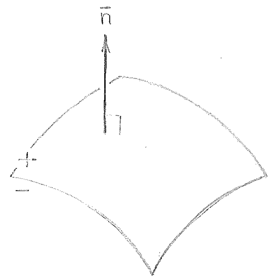
Möbiusbandet har bara en sida.

Utåtriktad normal

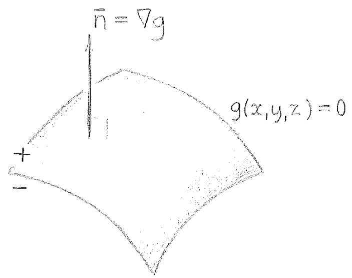
Orienteringen av en yta brukar indikeras genom att ange den utåtriktade normalen.



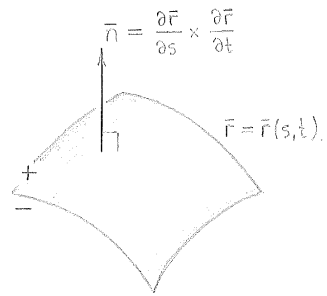
① Vi har ett orienterat ytstycke S.



② Orienteringen indikeras med den utåtpekande normalen.



③ Om ytan skrivs i ekvationsform $g(x,y,z)=0$, då är $\bar{n} = \nabla g$ en utåtriktad normal om g växer i riktning mot utsidan.



④ Om ytan skrivs i parameterform $\bar{r} = \bar{r}(s,t)$, då är

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

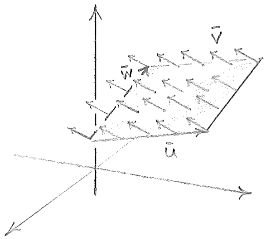
en utåtriktad normal genom ett lämpligt val av parametrisering.

Flöde genom ytor

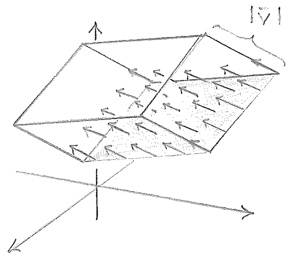
Konstant flöde genom ett parallellogram

En vätska flödar i rummet med den konstanta hastigheten $\bar{v}$. Genom ett parallellogram med kantvektorer $\bar{u}$ och $\bar{w}$ flödar mängden

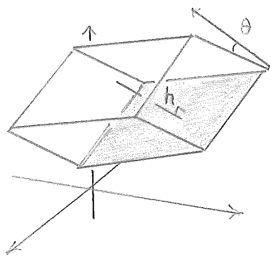
$$\Phi = \bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{w}) \quad \text{per tidsenhet.}$$



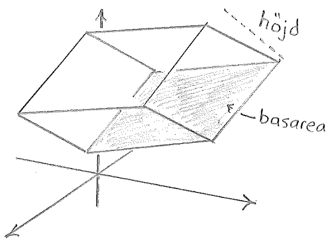
① En vätska med hastigheten $\bar{v}$ flödar genom parallellogrammet.



② På en tidsenhet flödar en mängd vätska genom ytan som är epipedens volym.



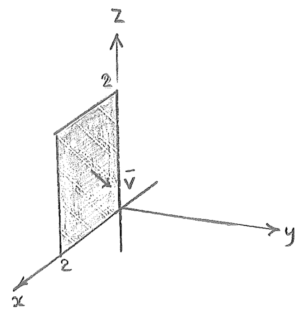
③ Om vinkeln mellan $\bar{v}$ och ytans normal är θ, då är epipedens höjd $h = |\bar{v}| \cos\theta$.

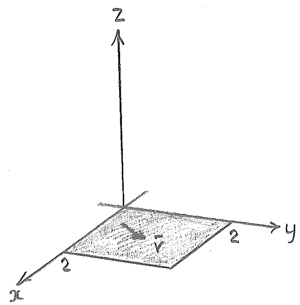


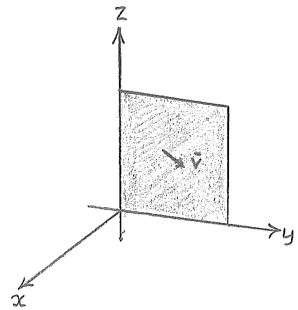
④ Epipedens volym ges av

$$\begin{aligned} \text{Volym} &= \text{basarea} \cdot \text{höjd} \\ &= |\bar{u} \times \bar{w}| \cdot |\bar{v}| \cos\theta \\ &= (\bar{u} \times \bar{w}) \cdot \bar{v}. \end{aligned}$$

Övning 1: Bestäm flödet av $\bar{v} = (0, 1, -1)$ genom resp. rektangel.







Flöde genom en parameteryta

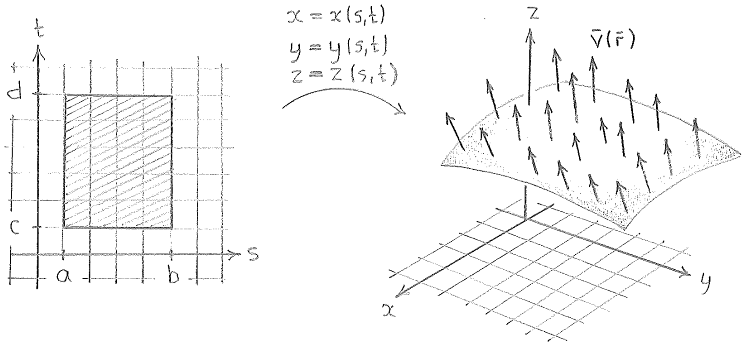
En vätska flödar i rummet med hastighetsfältet $\bar{v}(\bar{r})$. Genom en orienterad parameteryta

$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), \quad \text{där } (s,t) \in D,$$

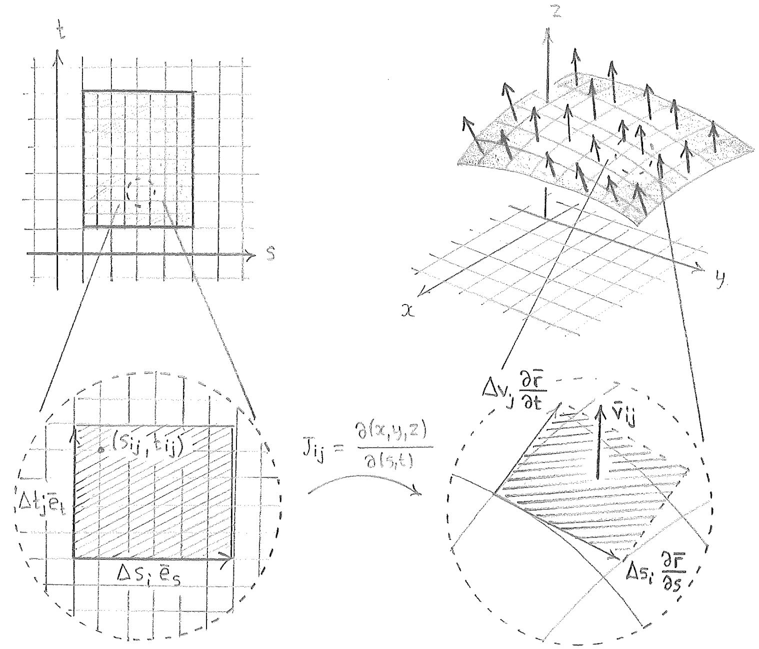
flödar då mängden

$$\Phi = \iint \bar{v}(\bar{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right) ds\,dt$$

vätska per tidsenhet.



(1) Vi ska bestämma flödet av $\bar{v}(\bar{r})$ genom parameterytan $\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, där parameterområdet är $D: a \leq s \leq b,\ c \leq t \leq d$.



(2) Partitionera parameterområdet $a \leq s \leq b$, $c \leq t \leq d$ med delrektanglar och avbilda dessa till en partitionering av ytan.

Varje delrektangel avbildas approximativt till ett parallellogram med kantvektorer $\Delta s_i \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}$ och $\Delta t_j \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$. På parallellogrammet approximerar vi vätskeflödet med det konstanta vektorfältet $\bar{v}_{ij} = \bar{v}(\bar{r}(s_{ij}, t_{ij}))$.

Flödet genom parallellogrammet är approximativt

$$\Delta \Phi_{ij} = \bar{v}_{ij} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right) \Delta s_i \Delta t_j.$$

$$\Phi \approx \sum \bar{v}_{ij} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right) \Delta s_i \Delta t_j$$

(3) Det totala flödet genom ytan är approximativt summan av flödet genom delparallellogrammen.

$$\Phi = \iint_D \bar{v} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right) ds\,dt$$

(4) Summan är en Riemannsumma som konvergerar mot ovanstående integral.

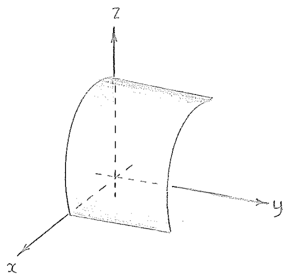
Vektoriellt ytelement

Uttrycket

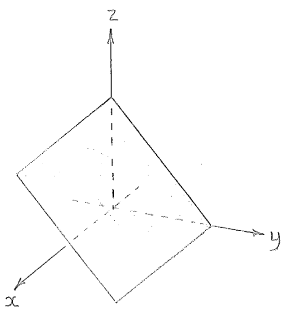
$$d\bar{S} = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right) ds\, dt$$

kallas för det vektoriella ytelementet.

Övning 2: Bestäm det vektoriella ytelementet till ytan.



$$\begin{cases} x = \cos s \\ y = t \\ z = \sin s \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$$

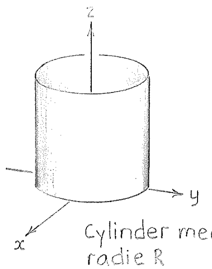
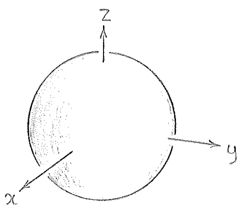
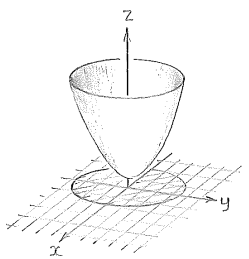
Exempel 1: Beräkna

$$\iint_S (xy, yz, xz) \cdot d\bar{S}$$

där S är ytan i övning 2a.

Flöde genom några vanliga ytor

Tabellen nedan sammanfattar det vektoriella ytelementet för några vanliga typer av ytor.

Yta	Parametrisering	Vektoriellt ytelement
 Cylinder med radie R	$\bar{r}(\theta, z) =$ $(R\cos\theta, R\sin\theta, z)$	$d\bar{S} = \pm(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)\,d\theta\,dz$
 Sfär med radie R	$\bar{r}(\phi, \theta) =$ $(R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$	$d\bar{S} = \pm R\sin\phi\,\bar{r}(\phi,\theta)\,d\phi\,d\theta$
 Funktionsyta $z = f(x,y)$	$\bar{r}(x,y) =$ $(x, y, f(x,y))$	$d\bar{S} = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)dx\,dy$

Exempel 2: Beräkna

$$\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S}$$

där $\bar{F} = (x, y, z)$ ut genom cylinderytan $S: x^2+z^2 = 16,\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 2.$

Exempel 3: Beräkna flödet av vektorfältet $F = (x^2, 0, 2z)$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.

Exempel 4: Beräkna

$$\iint_S (2x, 2y, 3) \cdot d\bar{S}$$

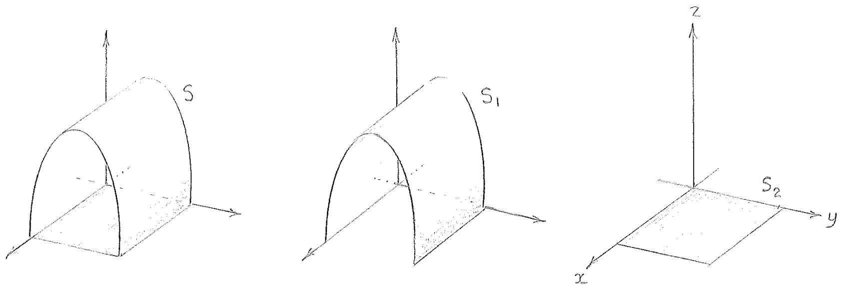
där S är den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ ovanför xy-planet och orienterad så att den utåtriktade normalen har positiv z-koordinat.

Räkneregel

Additivitet

Om S_1 och S_2 är två orienterade ytor, då är

$$\iint_{S_1+S_2} \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_{S_1} \bar{F}\cdot d\bar{S} + \iint_{S_2} \bar{F}\cdot d\bar{S}$$

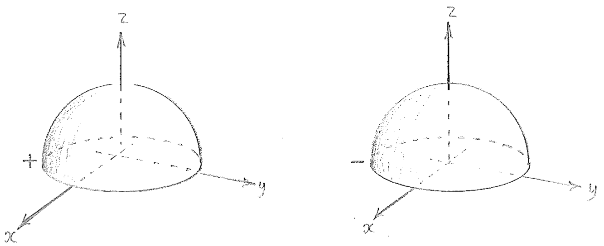


Flödet ut ur ytan S kan bestämmas genom att dela upp S i två delar S_1 och S_2 och addera flödet ut ur S_1 och S_2.

Orientering

Om S är en orienterad yta, då är

$$\iint_{-S} \bar{F}\cdot d\bar{S} = -\iint_{S} \bar{F}\cdot d\bar{S}.$$



Flödet ut ur en yta byter tecken när ytans orientering byter tecken.

Linjaritet

Om $\bar{F}$ och $\bar{G}$ är integrabla vektorfält och a och b är konstanter, då är

$$\iint (a\bar{F}+b\bar{G})\cdot d\bar{S} = a\iint \bar{F}\cdot d\bar{S} + b\iint \bar{G}\cdot d\bar{S}.$$

Exempel 5: Beräkna

$$\oiint_S (x,y,z)\cdot d\bar{S},$$

där S är den totala begränsningsytan till cylindern $x^2+y^2\leq 1$, $0\leq z\leq 1$, med utåtpekande normal.