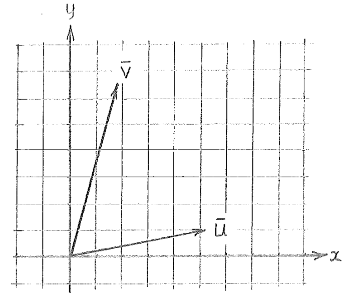
Föreläsning 22-23

- Rotationen av vektorfält i planet
  - Kryssprodukten i planet
  - Rotationen i planet
- Beräkning av integraler
- Greens formel
  - Vektorpotential i planet
  - Greens formel = Huvudsats

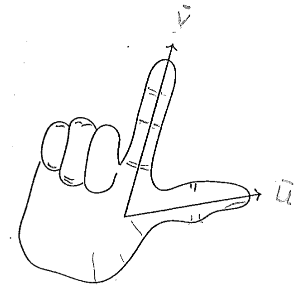
Rotationen av vektorfält

Kryssprodukten i planet

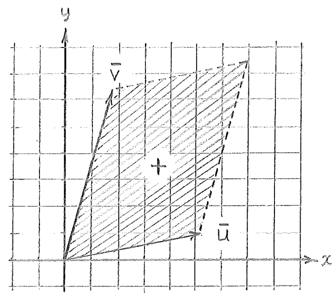
Givet två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i planet. Då definieras kryssprodukten $\bar{u} \times \bar{v}$ på följande sätt:



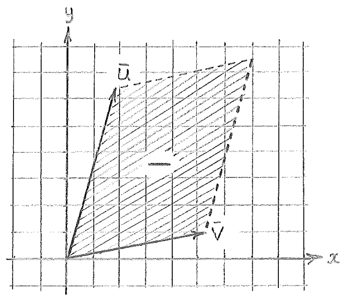
① Givet två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i planet.



② Antag att $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ är högerhandsorienterade

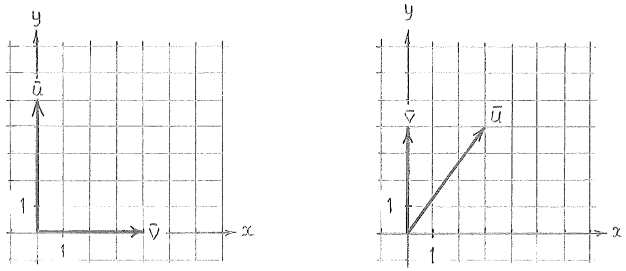


③ Kryssprodukten $\bar{u} \times \bar{v}$ är då lika med arean av det parallellogram som $\bar{u}$ och $\bar{v}$ spänner upp.



④ Om $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ är vänsterhandsorienterade är $\bar{u} \times \bar{v}$ lika med arean med minustecken.

Övning 1: Använd definitionen för att bestämma $\bar{u} \times \bar{v}$.



Om $\bar{u} = (u_1, u_2)$ och $\bar{v} = (v_1, v_2)$ i ett högerhands-orienterat ON-koordinatsystem, då är

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Övning 2: Beräkna $\bar{u} \times \bar{v}$ om

a) $\bar{u} = (1,2)$ och $\bar{v} = (-2,3)$

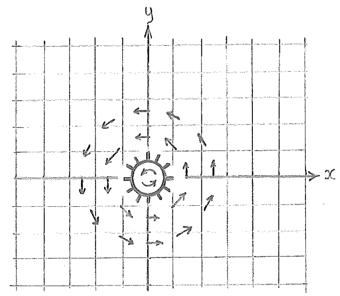
b) $\bar{u} = (-1,1)$ och $\bar{v} = (2,-2)$

Rotationen i planet

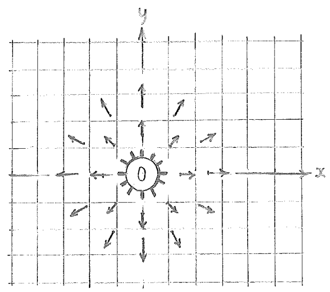
Uttrycket

$$\text{rot } \bar{F} = \nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$$

kallas för rotationen av $\bar{F} = (F_1, F_2)$ och anger hur mycket vektorfältet $\bar{F}$ virvlar i en punkt.



I origo är rot $\bar{F} > 0$.



I origo är rot $\bar{F} = 0$.

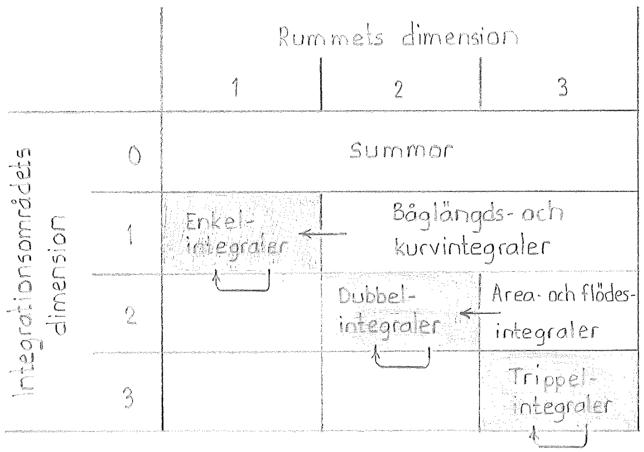
Övning 3: Bestäm rotationen av $\bar{F} = (x^2, xy)$.

Beräkning av integraler

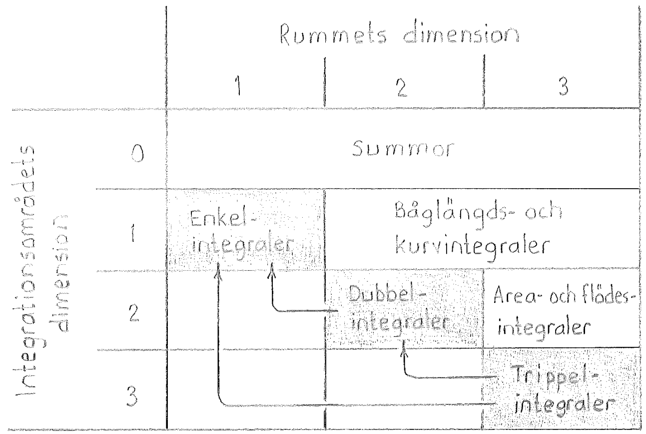
De tekniker vi använder för att beräkna integraler är huvudsakligen

1. Parametrisering av integrationsområdet.
2. Omskrivning som upprepade integraler av lägre ordning.
3. Någon form av huvudsats.

Genom att parametrisera kurvor och ytor kan integraler över dessa skrivas om som enkel- och dubbelintegraler. Även dubbel- och trippel- kan förenklas med parametrisering (men det går under namnet variabelsubstitution).



Dubbel- och trippelintegraler kan i många fall skrivas som upprepade integraler av lägre ordning.

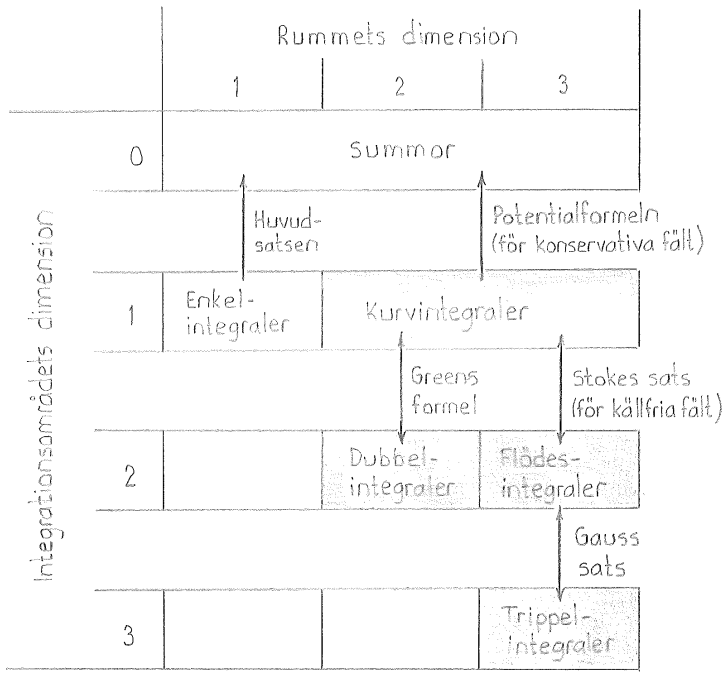


Enkelintegraler kan beräknas med integralkalkylens huvudsats

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

som reducerar integralen över hela intervallet till en summa av en primitiv funktion beräknad i intervallets ändpunkter.

För de övriga integraltyperna finns någon form av huvudsats som reducerar integralen över hela området till en integral över randen.



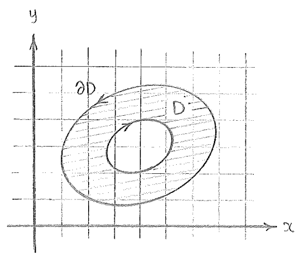
Rummets dimension
1
2
3
Integrationsområdets dimension
0
1
2
3
Summor
Huvud-satsen
Potentialformeln (för konservativa fält)
Enkel-integraler
Kurvintegraler
Greens formel
Stokes sats (för källfria fält)
Dubbel-integraler
Flödes-integraler
Gauss sats
Trippel-integraler

Greens formel

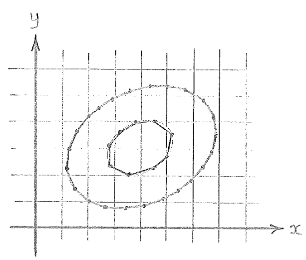
Låt D vara ett slutet område med en styckvis kontinuerligt deriverbar enkel randkurva ∂D som är positivt orienterad, och antag att vektorfältet $\bar{F} = (P, Q)$ är kontinuerligt deriverbart på D. Då är

$$\oint_{\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_D \operatorname{rot} \bar{F} \, dx \, dy.$$

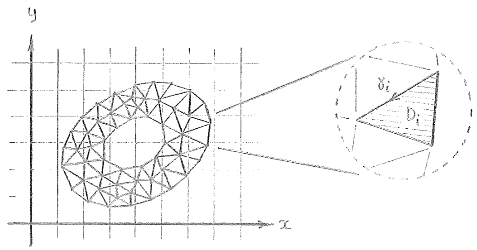
Bevisskiss:



(1) Vi startar med området D och dess positivt orienterade rand ∂D.



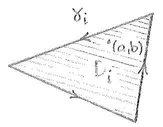
(2) Approximera randen genom att dela upp den i räta linjestycken.



(3) Dela upp området i trianglar D_i utifrån randens linjestycken och låt γ_i vara den positivt orienterade randen till D_i. Då är $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ och integralers additivitet ger att

$$\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy,$$

$$\oint_{\partial D} (P, Q) \cdot d\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} (P, Q) \cdot d\bar{r}.$$

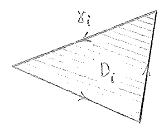


(4) Fokusera på en enskild triangel. Dubbelintegralen över D_i är

$$\iint_{D_i} (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy$$

$$= \big(Q'_x(a,b) - P'_y(a,b)\big) \operatorname{area}(D_i) + \text{R.T.}$$

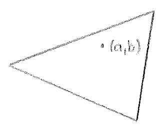
där (a,b) är en punkt i D_i.



(5) Visa sedan följande elementära hjälpresultat

$$\oint_{\gamma_i} (A + Bx + Cy) \, dx + (E + Fx + Gy) \, dy$$

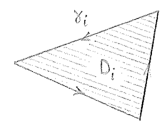
$$= (F - C) \operatorname{area}(D_i).$$



(6) Linjarisera vektorfältet $\bar{F}$ kring $(x,y) = (a,b)$,

$$\bar{F}(a+h, b+k)$$

$$= \begin{pmatrix} P(a,b) + P'_x(a,b)h + P'_y(a,b)k \\ Q(a,b) + Q'_x(a,b)h + Q'_y(a,b)k \end{pmatrix} + \text{R.T.}$$



(7) Kurvintegralen över γ_i är appr.

$$\oint_{\gamma_i} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$$= \oint_{\gamma_i} \big(P(a,b) + P'_x(a,b)(x-a) + P'_y(a,b)(y-b)\big) \, dx$$

$$+ \oint_{\gamma_i} \big(Q(a,b) + Q'_x(a,b)(x-a) + Q'_y(a,b)(y-b)\big) \, dy + \text{R.T.}$$

$$= \{\text{Hjälpresultat } (5)\}$$

$$= \big(Q'_x(a,b) - P'_y(a,b)\big) \operatorname{area}(D_i) + \text{R.T.}$$

(8) Alltså har vi visat att

$$\iint_{D_i} (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy = \oint_{\gamma_i} (P, Q) \cdot d\bar{r} + \text{Restterm}.$$

Summering ger att

$$\iint_{D} (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy = \oint_{\gamma} (P, Q) \cdot d\bar{r} + \text{Restterm}$$

Genom att detta gäller oavsett approximationen kan vi låta approximationens finhet gå mot noll och i gränsen har vi att resttermen är noll.

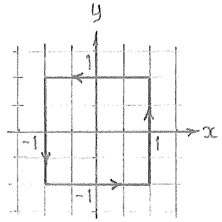
Exempel 1: Beräkna

$$\int_\gamma (x^4 - y^2)\,dx + (x^4 + y^2)\,dy$$

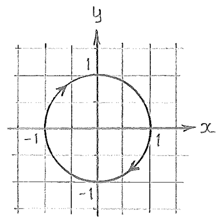
längs parabeln $y = x^2$ från $(-1,1)$ till $(1,1)$ och linjen $y=1$ från $(1,1)$ till $(-1,1)$.

Övning 4: Skriv kurvintegralen som en dubbelintegral med Greens formel.

a) $\oint (xy, x+y) \cdot d\bar{r}$



b) $\oint y^3\,dx - x^3\,dy$



Övning 5 Beräkna dubbelintegralen i övning 4b.

Exempel 2: Beräkna

$$\int xy^2\,dx - yx^2\,dy$$

längs kvartscirkelbågen av $x^2+y^2=2y$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.

Vektorpotential i planet

Ett vektorfält $\bar{A}$ kallas för en vektorpotential till $f(x,y)$ om

$$f(x,y) = \operatorname{rot}\bar{A} = \nabla\times\bar{A}.$$

Observera att vektorpotentialen inte är unik. Även $\bar{A}+\bar{F}$, där $\bar{F}$ är ett konservativt vektorfält, är en vektorpotential eftersom

$$\operatorname{rot}(\bar{A}+\bar{F}) = \operatorname{rot}\bar{A} + \operatorname{rot}\bar{F} = f(x,y)+0 = f(x,y).$$

Exempel 3: Bestäm en vektorpotential till $f(x,y) = xy$.

Övning 6: Bestäm en vektorpotential till

a) $f(x,y) = 1$

b) $f(x,y) = x$

c) $f(x,y) = y$

d) $f(x,y) = (x+y)e^{x^2+y^2}$

Greens formel = Huvudsats

Greens formel kan skrivas som

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \oint_{\partial D} \bar{A}\cdot d\bar{r} \qquad (*)$$

där $\bar{A}$ är en vektorpotential $f(x,y)$.

Formeln $(*)$ kan ses som en analog till integralkalkylens huvudsats,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

I båda fallen reduceras en integral över hela området till att evaluera en "primitiv funktion" på randen.

Övning 7: Härled en kurvintegralformel för

a) Arean av området D

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$$

b) Yttröghetsmomentet med avseende på y-axeln för en balk med tvärsnitt D

$$I_y = \varrho \iint_D y\,dx\,dy$$

Exempel 4: Beräkna

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

där D är cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1$.