Föreläsning 24-25

- Rotation och divergens
- Stokes sats
  - Vektorpotential i rummet
  - Stokes sats = Huvudsats
- Gauss sats
  - Divergenspotential
  - Gauss sats = Huvudsats

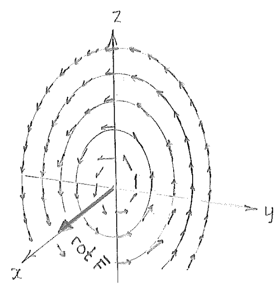
Rotation och divergens

Rotationen i rummet

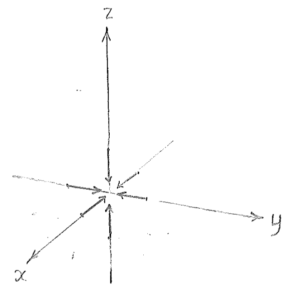
Uttrycket

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

kallas för rotationen av $\bar{F} = (P, Q, R)$ och dess belopp anger hur mycket vektorfältet $\bar{F}$ virvlar i en punkt och dess riktning anger rotationsaxeln.



I origo är $\operatorname{rot} \bar{F} = k\bar{e}_x$



I origo är $\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}$.

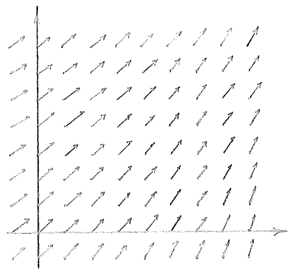
Övning 1: Bestäm rotationen av $\bar{F} = (y, z, x)$.

Divergens

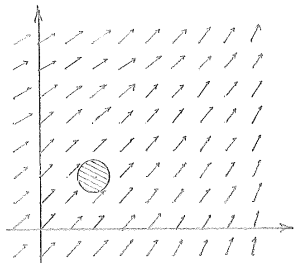
Uttrycket

$$\operatorname{div} \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

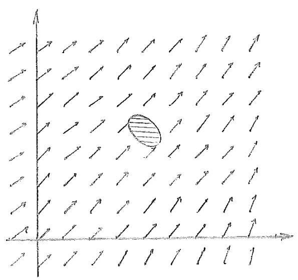
kallas för divergensen/källtätheten av $\bar{F}$ och mäter vektorfältets relativa volymändring.



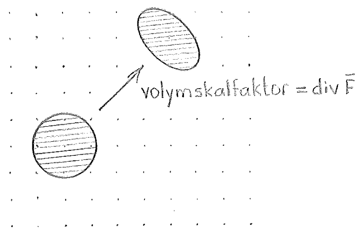
① Antag att vi har en vätska som flödar med hastighetsfältet $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$.



② Betrakta en liten kontrollvolym K vid tidpunkten t som har volymen ΔV.



③ Låt K flyta med vätskan under tiden Δt.



④ Då har K ändrat sin volym till

$$\Delta V + (\operatorname{div} F)\,\Delta V\,\Delta t + \text{Restterm}.$$

Ett vektorfält $\bar{F}$ kallas för källfritt om $\operatorname{div} \bar{F} = 0$ överallt.

Övning 2: Bestäm divergensen av $\bar{F}$.

a) $\bar{F} = (z, x, y)$

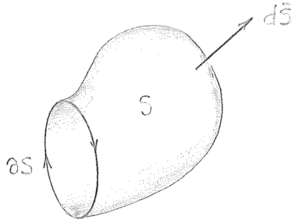
b) $\bar{F} = (x^2 + yz,\ y^2 + xz,\ z^2 + xy)$

Stokes sats

Antag att S är en orienterad yta med en orienterad randkurva ∂S. Om $\bar{F} = (P, Q, R)$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält, då är

$$\int_{\partial S} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{F}) \cdot d\bar{S},$$

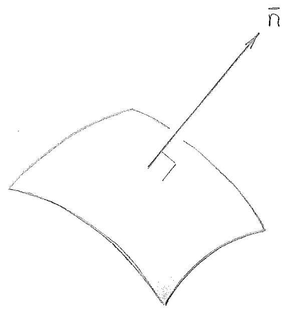
där $\operatorname{rot} \bar{F}$ är rotationen av $\bar{F}$.



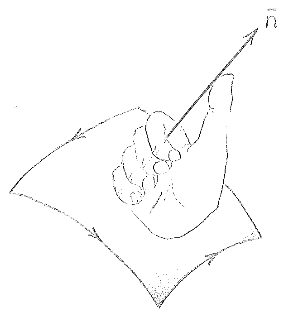
Beviset är snarlikt det för Greens formel.

Orienterade randkurvor

Om en orienterad yta har en randkurva så inducerar ytan en orientering av randkurvan via högerhandsregeln.

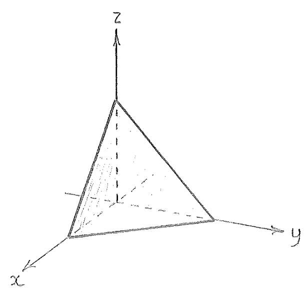


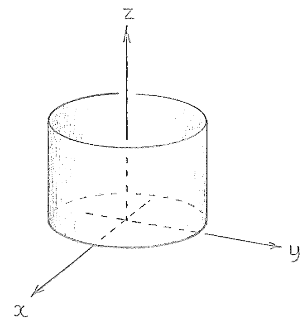
① Vi har en orienterad yta med den utåtriktad normal $\bar{n}$.



② Om högerhandens tumme pekar i riktningen $\bar{n}$ så anger de andra fingrarna orienteringen på randkurvan.

Övning 3: Ytorna nedan ges en orientering så att sidan bortvänd från origo är utåtriktad. Markera den inducerade orienteringen av randkurvan.

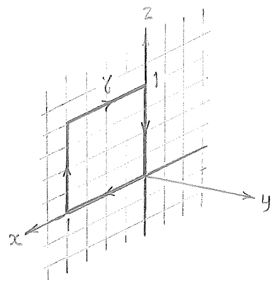




Övning 4: Skriv om kurvintegralen

$$\oint_{\gamma} (y, z, x) \cdot d\bar{r}$$

som en flödesintegral enligt Stokes sats.



Exempel 1: Beräkna

$$\int_{C} (xyz,\ xy^2z^3 - z,\ xy^3z^2) \cdot d\bar{r}$$

där C är cirkeln $y^2 + z^2 = 1,\ x = 1$ genomlöpt i negativ led sett från origo.

Exempel 2: Beräkna

$$\int_C (xz, 0, y) \cdot d\bar{r}$$

längs den slutna kurvan C som är sammansatt av skärningskurvorna mellan enhetssfären och koordinatplanen i första oktanten $(x, y, z \geq 0)$. Välj själv orientering.

Vektorpotential i rummet

Ett vektorfält $\bar{A}$ kallas för en vektorpotential till ett källfritt vektorfält $\bar{F}$ om

$$\bar{F} = \text{rot}\,\bar{A} = \nabla \times \bar{A}.$$

Om $\bar{F}$ inte är källfritt finns ingen vektorpotential.

Observera att vektorpotentialen inte är unik. Även $\bar{A} + \bar{G}$, där $\bar{G}$ är ett konservativt vektorfält, är en vektorpotential eftersom

$$\text{rot}\,(\bar{A} + \bar{G}) = \text{rot}\,\bar{A} + \text{rot}\,\bar{G} = \bar{F} + \bar{0} = \bar{F}.$$

Exempel 3: Givet $\bar{F} = (x+y,\ y+z,\ x+y-2z)$.

a) Visa att $\bar{F}$ är källfritt

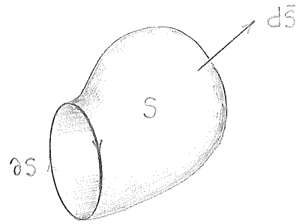
b) Bestäm en vektorpotential till $\bar{F}$.

Stokes sats = Huvudsats

För källfria vektorfält F kan Stokes sats formuleras som

$$\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \oint_{\partial S} \bar{A}\cdot d\bar{r} \qquad (*)$$

där A är en vektorpotential $\bar{F}$.



Formeln (*) kan jämföras med integralkalkylens huvudsats för enkelintegraler

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

I båda fallen reduceras en integral över hela området till att evaluera en "primitiv funktion" på randen.

Exempel 4: Beräkna

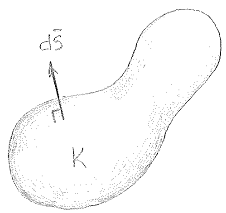
$$\iint_S (x+y,\ y+z,\ x+y-2z)\cdot d\bar{S}$$

där S är halvsfären $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$.

Gauss sats

Låt K vara ett kompakt område med en rand som består av styckvis kontinuerligt deriverbara ytstycken och där $d\bar{S}$ är det utåtriktade vektoriella ytelementet. Om $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält, då är

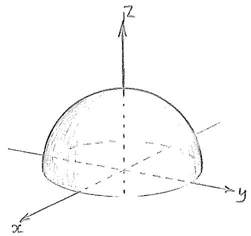
$$\oint\!\!\!\oint_{\partial K} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_K \operatorname{div} \bar{F} \, dx\,dy\,dz.$$



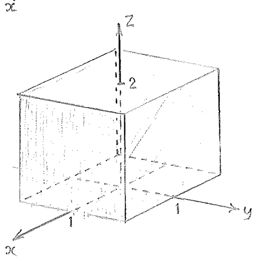
(Beviset är snarlikt det till Greens formel.)

Övning 5: Skriv om flödesintegralen som en trippelintegral enligt Gauss sats.

a) $\oint\!\!\!\oint_{\partial K} (xy^2, y, xz^2) \cdot d\bar{S}$



b) $\oint\!\!\!\oint_{\partial K} (y^2, z^2, x^2) \cdot d\bar{S}$



Exempel 5: Beräkna flödet av vektorfältet $\bar{F} = (x^3 y, xz, yz^3)$ ut från området $x^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $x \geq 0$ och $z \geq 0$.

Exempel 6: Beräkna

$$\iint_S (x+y,\ y+z,\ x+y-2z)\cdot d\bar{S}$$

där S är halvsfären $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$.

Divergenspotential

Ett vektorfält F kallas för en divergenspotential till $f(x,y,z)$ om

$$f(x,y,z) = \operatorname{div} \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F}.$$

Observera att divergenspotentialen inte är unik. Även $\bar{F}+\bar{G}$, där $\bar{G}$ är ett källfritt vektorfält, är en divergenspotential eftersom

$$\operatorname{div}(\bar{F}+\bar{G}) = \operatorname{div}\bar{F} + \operatorname{div}\bar{G} = f(x,y,z)+0 = f(x,y,z).$$

Namnet "divergenspotential" är inte ett etablerat ord.

Exempel 7: Bestäm en divergenspotential till

$$f(x,y,z) = x^2+yz.$$

Övning 6: Bestäm en divergenspotential till

a) $f(x,y,z)=1$

b) $f(x,y,z)=x+y+z$

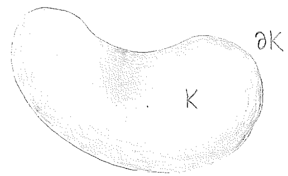
c) $f(x,y,z)=e^{x^2}$

Gauss sats = Huvudsats

Gauss sats kan skrivas som

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial K} \bar{F}\cdot d\bar{S}, \qquad (*)$$

där F är en divergenspotential till $f(x,y,z)$.



Formeln (*) kan jämföras med integralkalkylens huvudsats för enkelintegraler

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

I båda fallen reduceras en integral över hela området till att evaluera en "primitiv funktion" på randen.

Övning 7: Härled en flödesintegralformel för

a) Volymen av kroppen K

$$\text{Volym}(K) = \iiint_K 1 \, dx\, dy\, dz$$

b) Deviationsmomentet

$$I_{xy} = \rho \iiint_K xy \, dx\, dy\, dz$$

Exempel 8: Beräkna

$$\iiint_K (x^2 + yz) \, dx\, dy\, dz$$

där K är enhetsklotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.