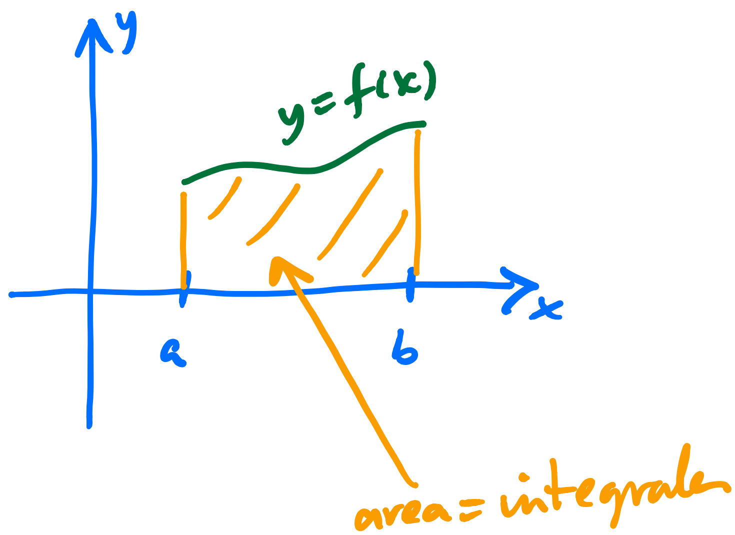
IDAG: DUBBELINTEGRALER

Analogi: $\int_a^b f(x)\,dx$

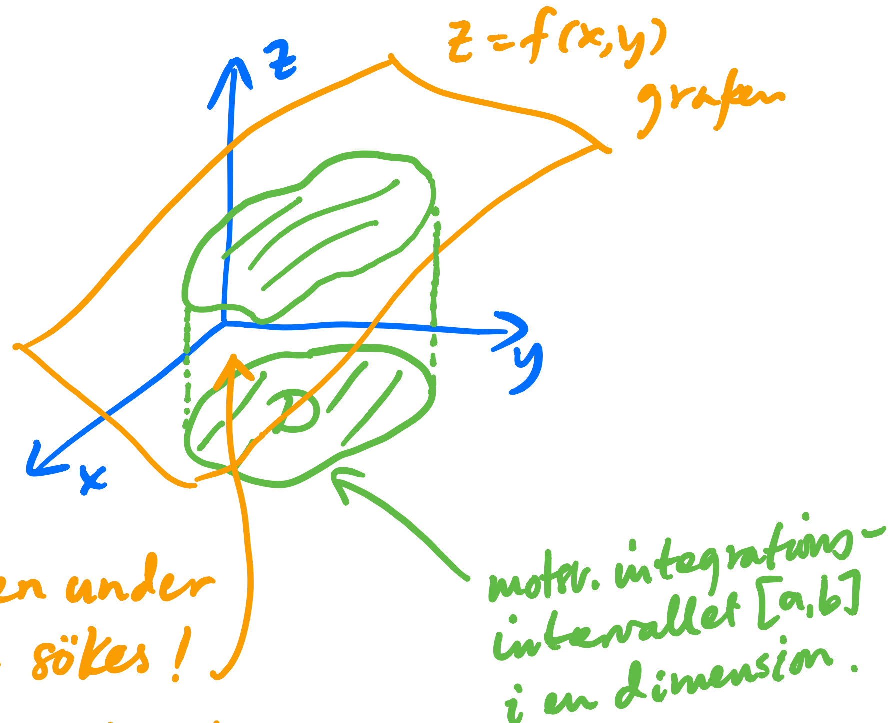


Idag: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

D: område i planet

$f(x,y)$ funktionen av två variabler

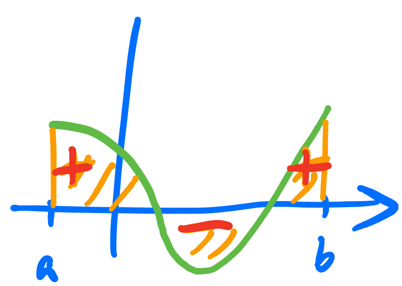
$z = f(x,y)$ grafen



volymen under ytan sökes! mellan xy-planet och grafytan, avgränsat av $D: (x,y) \in D$.

Frågor: Vad händer om grafen går under xy-planet: Då räknar vi den volymen med negativt tecken.

Jfr 1 var:



Samma sak alltså i tvåvariabelfallet.

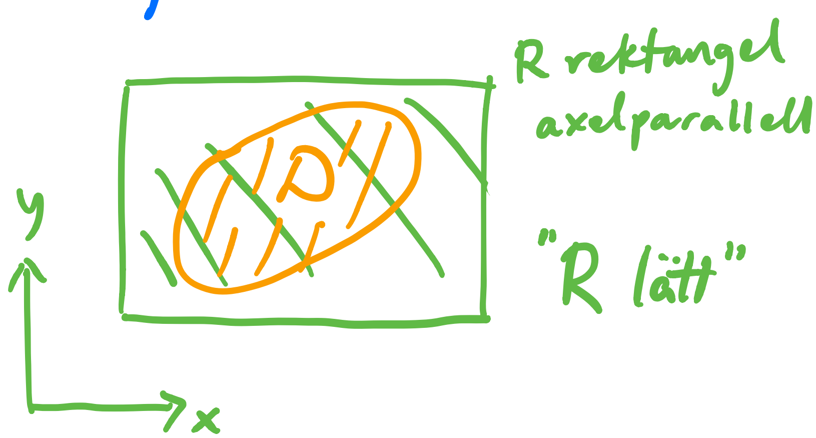
Bokens framställning:

svårigheter pga: ① $f(x,y)$ svår

② D svårt.

Vi kan reducera: D svårt kan vi ta bort.

Hur gör vi?



Hitta på $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$

Vi deklarerar att

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

Efter detta behöver vi bara tänka på rektanglar R istället för D.

PRIS: $\tilde{f}$ mer komplicerad än f.

Vår uppgift:

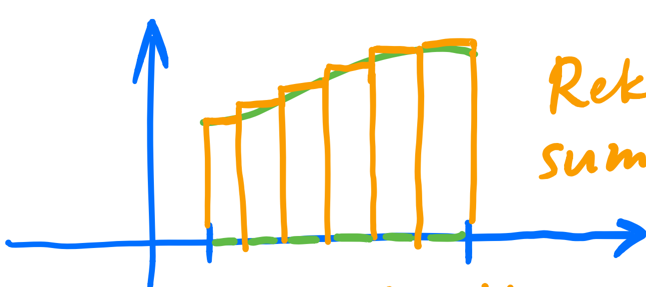
$$\iint_R \underbrace{\tilde{f}(x,y)}_{g(x,y)}\,dx\,dy.$$

Hur gjorde vi i en variabel?

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b \quad \text{klassisk}$$

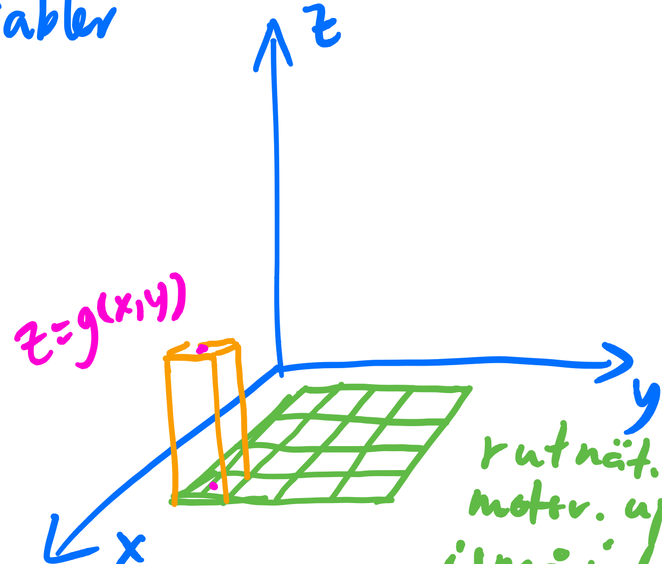
$$F' = f$$

men det är inte den som är definitionen!



Låt $\underbrace{\text{steglängden}}_{\text{maximala intervallbredden}} \longrightarrow 0$

två variabler



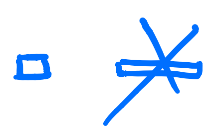
rutnät.
motsv. uppdelning
i små intervall

volym av rätblock
bredd · djup · höjd

Summera ihop dem!

Låt rutindelningen göra så
att rutorna blir allt mindre

diametern $\longrightarrow 0$



Detta ger oss $\iint_R g(x,y)\,dx\,dy.$

Vi vill hitta motsvarigheten till

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b \quad !$$

<u>Iterationsmetoden</u> (Fubinis sats)

$$\iint_R g(x,y)\,dxdy = \iint_{\substack{a \le x \le b \\ c \le y \le d}} g(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{y=c}^{y=d} g(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{x=a}^{x=b} g(x,y)\,dx \right) dy$$

<u>Ex.</u>

$$\iint_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2}} (x^2 + y^2 + xy)\,dxdy =$$

$$= \int_1^2 \Bigg(\underbrace{\int_{x=0}^{x=1} (x^2+y^2+xy)\,dx}_{y=\text{konstant}} \Bigg) dy =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x + \frac{x^2}{2} y \right]_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \int_1^2 \Bigg(\left[\frac{1^3}{3} + y^2 \cdot 1 + \frac{1^2}{2} y \right] - \underbrace{\cancel{\left[\frac{0^3}{3} + y^2 \cdot 0 + \frac{0^2}{2} y \right]}}_{=0} \Bigg) dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{3} + y^2 + \frac{y}{2} \right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4} \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2^3}{3}\,{}^{8} + \frac{2^2}{4}\,{}^{=1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{4} \right) =$$

$$= \frac{41}{12}.$$

Andra hållet : $\displaystyle\iint_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2}} (x^2+y^2+xy)\,dx\,dy =$

$$= \int_0^1 \left(\int_{y=1}^{y=2} (x^2+y^2+xy)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 \cdot 2 + \frac{2^3}{3} + x \cdot \frac{2^2}{2} - \left(x^2 \cdot 1 + \frac{1^3}{3} + x \cdot \frac{1^2}{2} \right) \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{3}x \right]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} + \frac{3}{4} \cdot 1^2 + \frac{7}{3} \cdot 1 - 0 = \frac{8}{3} + \frac{3}{4} = \frac{32+9}{12} = \frac{41}{12}.$$

SAMMA SVAR!

OBS! Om iterationsmetoden är enklare i en viss ordning så tar vi den!

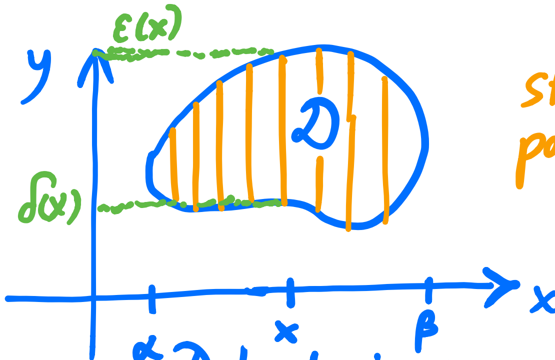
Finns det något kvar att förstå med dubbelintegraler?

$D \rightsquigarrow R$ hur gick det till?

Ger detta en direkt metod att beräkna

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \;?$$

Hur kan vi beskriva ett område D ?

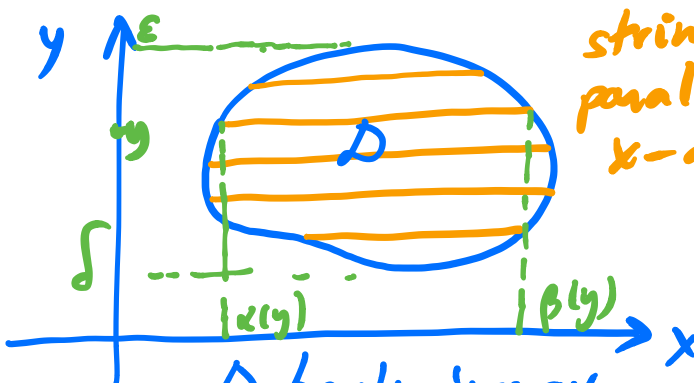


strimla upp parallellt med y-axeln

a	α
b	β
c	γ
d	δ

D beskrivs som

$$\begin{cases} \delta(x) \leq y \leq \varepsilon(x) \\ \alpha \leq x \leq \beta \end{cases}$$



strimla upp parallellt med x-axeln

D beskrivs av

$$\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$$
$$\delta \leq y \leq \varepsilon$$

FRÅGOR ?

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} + \iint_{D_4}$$

strimla ?
Stycka först.

Hur fungerar strimling ihop med vår iterationsformel?

Antag att D beskrivs av $\begin{cases} \delta(x) \le y \le \varepsilon(x) \\ \alpha \le x \le \beta . \end{cases}$

strimlor i y-led.

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_{y=\delta(x)}^{y=\varepsilon(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .}$$

Strimling i x-led:

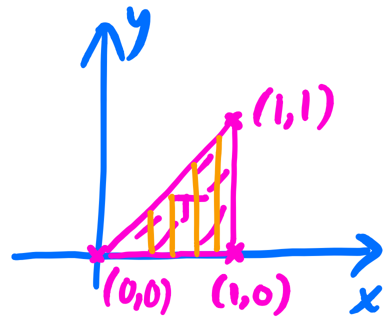
D ges av $\begin{cases} \alpha(y) \le x \le \beta(y) \\ \delta \le y \le \varepsilon . \end{cases}$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\delta^\varepsilon \left(\int_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy}$$

OBS! Ofta är det fritt att välja strimlingsledd. Vi väljer den som blir enklast.

Ex. T triangel hörn i $(0,0), (1,0), (1,1)$.

Beräkna $\iint_T xy\,dx\,dy$.



$$\begin{cases} 0 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y=0}^{y=x} xy\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x \cdot x^2}{2} - 0 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}.$$

Vad händer om vi har fler variabler?

Finns det vettiga integrationsmetoder?

Vilka är de viktigaste integrationsmetoderna i en variabel? ① partiell integration
② variabel-substitution

Finns det variabelsubstitution i två eller flera variabler? Går att göra!

Tre variabler:

$f(x,y,z)$

graf $w = f(x,y,z)$ i 4 dim.

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \text{en 4D volym (med tecken)}$$

K kropp i 3 dimensioner.

OBS!

$$\iiint_K \underbrace{\overbrace{dx\,dy\,dz}^{dV \text{ volymselement}}}_{f=1 \text{ alltså}} = \text{volym}(K)$$

$$\iint_D \underbrace{\overbrace{dx\,dy}^{dA \text{ areaelement}}}_{f=1 \text{ alltså}} = \text{area}(D).$$

gäller i varje dimension.

Hur räknar vi ut

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad ?$$

Beskriva K : strimling $\begin{cases} \alpha_1(y,z) \le x \le \beta_1(y,z) \\ \alpha_2(z) \le y \le \beta_2(z) \\ \alpha_3 \le z \le \beta_3. \end{cases}$

$\Downarrow$

Iterationsmetoden

flera varianter : $3 \cdot 2 = 6$ alternativ

$$\begin{cases} \alpha_3(x,y) \le z \le \beta_3(x,y) \\ \alpha_2(x) \le y \le \beta_2(x) \\ \alpha_1 \le x \le \beta_1 \end{cases}$$

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{\alpha_3}^{\beta_3} \left(\int_{\alpha_2(z)}^{\beta_2(z)} \left(\int_{\alpha_1(y,z)}^{\beta_1(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz$$

precis på samma vis.