IDAG: forts. av DUBBELINTEGRALER

⇝ Variabelsubstitution

⇝ generaliserade integraler

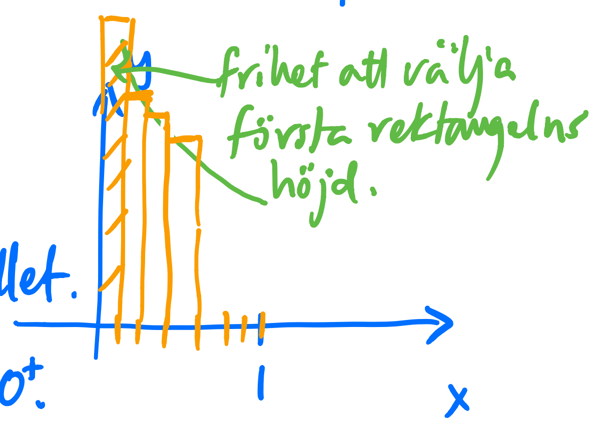
---

1 var: Ex. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \overset{\text{SATS}}{=} \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 0 = 2$

Finns något problem! Vilket?

Funktionen som vi integrerar (integranden) är obegränsad på intervallet.

Spec. $\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ då $x \to 0^+$.




Varför besvärligt? Riemann-integralen bygger på uppdelning av intervallet i ändligt många delar och första rektangelns area kan bli hur stor som helst.

Men vi känner på oss att rätta arean under kurvan är 2. Teoretisk lösn. är den generaliserade

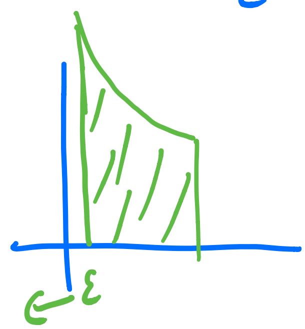
Riemann-integralen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \left[\text{i generaliserad mening}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ 2\sqrt{x} \right]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon} \right]$$

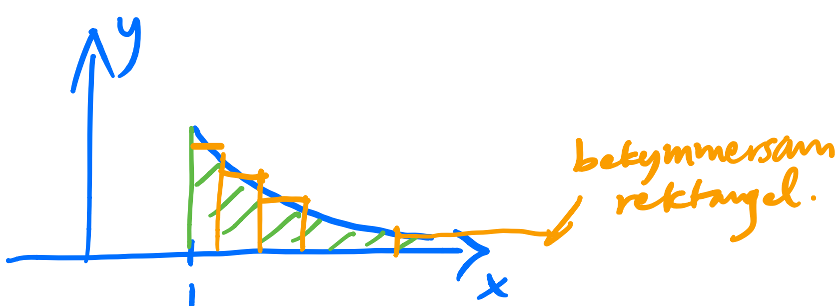
$$= 2 - 0 = 2$$



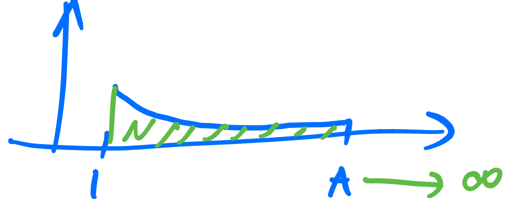

Ex.
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^\infty = \underbrace{\text{"}-\frac{1}{\infty}\text{"}}_{=0} - \left( -\frac{1}{1} \right) =$$

$$= 1.$$

Inte heller i Riemanns mening utan generaliserad.




Klipp av:



$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$ [i generaliserad Riemann-mening]

$$= \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{A} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \lim_{A\to\infty} 1 - \frac{1}{A} = 1.$$

Vad gör vi i 2 variabler?

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

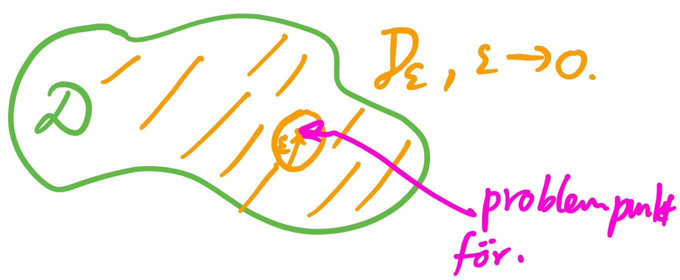
Vi kan ske har:

① Obegr. $f$

② Obegr. område $D$

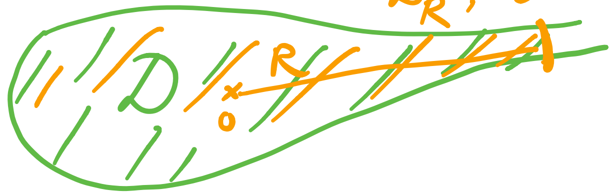
Vad kan vi göra?

Reducera $D$ lite så vi tar bort problemen, och sedan gå i gräns.



Om $D$ är obegränsat då?

$D_R$, låt $R \to \infty$.




Mer allmänt: uttömmande följd av delområden

$D_1, D_2, D_3, \ldots$

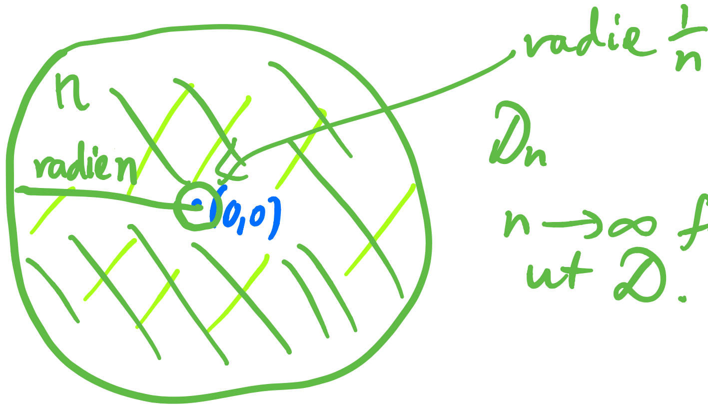
$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \ldots$

"fyller ut $D$"

unionen av allihopa ska bli $D$ med möjligt undantag av ändligt många punkter.

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

tagit bort problempunkt i origo.




$D_n$

$n \to \infty$ fyller ut $D$.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \text{ [i generaliserad mening]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{väldef Riemannintegraler.}}$$

Att fundera på: Tänk om svaret skulle bero på hur vi fyller ut?

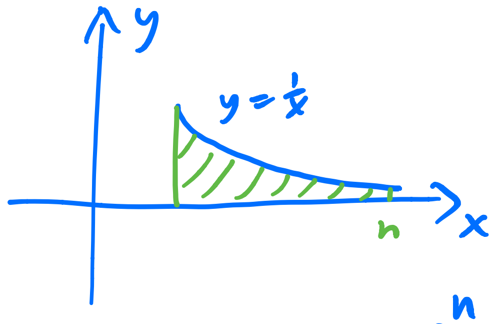
OBS! Om $f(x,y) \geq 0$ på $D$ finns inte det här problemet!

Ex. $D: \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \end{cases}$

Beräkna $\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y}$ i generaliserad mening.

Hur gör vi? Observera att $\frac{1}{x+y} \geq 0$ på $D$.

Då beror inte resultatet av val av uttömmande följd. Välj $D_n: \begin{cases} 1 \leq x \leq n \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \end{cases}$. $(n\to\infty)$




$$\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{x+y} = \iint_{\substack{1\le x\le n\\ 0\le y\le \frac{1}{x}}} \frac{dx\,dy}{x+y} = \int_1^n \left(\int_{y=0}^{y=\frac{1}{x}} \frac{dy}{x+y}\right)dx$$

$$= \int_1^n \Big[\ln(\underbrace{x+y}_{>0})\Big]_{y=0}^{y=\frac{1}{x}} dx =$$

$$= \int_1^n \Big(\underbrace{\ln\left(x+\tfrac{1}{x}\right) - \ln(x+0)}_{\ln \frac{x+\frac{1}{x}}{x}}\Big)\,dx =$$

$$= \int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{x} \\ x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array}\right]$$

$$= \int_1^{1/n} \ln(1+t^2)\left(-\frac{1}{t^2}dt\right) = \left[-\int_a^b = \int_b^a\right]$$

$$= \int_{1/n}^{1} \ln(1+t^2)\,\frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_{1/n}^{1}$$

$$+ \int_{1/n}^{1} \left(+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{1}\cdot\ln(\underbrace{1+1^2}_{2}) + \underbrace{\frac{1}{1/n}}_{=n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$+ \int_{1/n}^{1} \frac{2}{1+t^2}\,dt = -\ln 2 + n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$+ \left[2\arctan t\right]_{1/n}^{1} = -\ln 2 + \underbrace{n\ln\Big(1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\approx \frac{1}{n^2}}\Big)}_{\to 0}$$

$$+ \underbrace{2\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{2\arctan\frac{1}{n}}_{2\arctan 0 = 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Notera: $\ln(1+\theta) \approx \theta$ om $\theta \approx 0$. (Taylor)

$$\theta = \frac{1}{n^2}$$

# MEDELVÄRDEN & TYNGDPUNKT

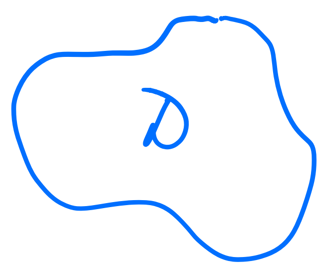
Medelvärde = ? $\qquad x_1, \dots, x_n$ mätvärden

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Medelvärden för funktioner på intervall :

$$\langle f \rangle_{[a,b]} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Tyngdpunkt för homogen platta :




xy-planet

tyngdpunkt

$(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ där

$$\langle x \rangle = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}, \quad \langle y \rangle = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

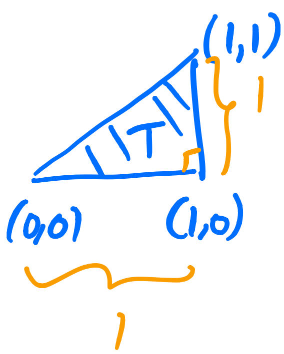
Vid inhomogen platta blir tyngdpunkten

$$\langle x\rangle = \frac{\iint\limits_D x\rho\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho\,dx\,dy}, \quad \langle y\rangle = \frac{\iint\limits_D y\rho\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho\,dx\,dy}$$

$\rho$ = tätheten.

<u>Ex.</u> Medelvärdet av $x^2+y^2$ över

$T$ : triangel med hörn $\begin{cases}(0,0)\\(1,0)\\(1,1)\end{cases}$ $= ?$




$$\langle x^2+y^2\rangle = \frac{\iint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy}{\iint\limits_T dx\,dy}$$

$\text{area}(T) = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2}$

$$\iint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le x}} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_{y=0}^{y=x} (x^2+y^2)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left( x^3 + \frac{x^3}{3} - 0 \right) dx =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{4}{3} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\left( \frac{1^4}{4} - 0 \right) = \frac{1}{3}.$$

SVAR: $\frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$ blir medelvärdet av $x^2+y^2$.

---

Variabelbyten (substitution)

Viktigt variabelbyte: polära koordinater

$$dA = dxdy = r\,dr\,d\theta \qquad \left( (x,y) \leadsto (r,\theta) \right)$$

Fick vi ur att $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ (Jakobianen)

<u>Ex.</u> $D: x^2+y^2 \leq 1$ (enhetsskivan)

Beräkna $\iint_D (1-x^2-y^2)\,dxdy$ !

Lösn. byt till polära koordinater $(r,\theta)$:

$x^2+y^2=r^2$, $D$ ges av att $\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

$dxdy = r\,dr\,d\theta$

$$\iint_D (1-x^2-y^2)\,dxdy = \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

$= \left[\text{produktfunktion, rektangel}\right] =$

$$\int_{0\le r\le 1} \overbrace{(1-r^2)r}^{r-r^3}\,dr \int_{0\le\theta\le 2\pi} d\theta =$$

$$= \left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-0\right)(2\pi-0) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$

---

Förenklingssituation:

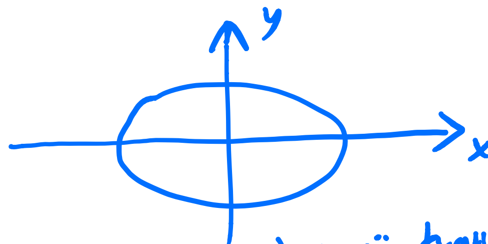
$$\iint\limits_{\substack{a \le x \le b \\ c \le y \le d}} g(x)h(y)\,dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy$$

produktformeln

följer ur iterationsformeln.

---

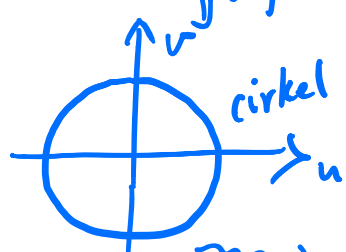
Ellipser då?



linjär transf.

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}$$

cirkel



$(a, b > 0)$

$\rightsquigarrow$ polära koord.

---

Mer allmänna koordinatbyten:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$ Jfr $dxdy = r\,dr\,d\theta$

Jakobianen $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

Pss $dudv = \left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy$

Att tänka på: $D$ ändras under variabelbytet!

$$(x,y) \in D \iff (u,v) \in \tilde{D}$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\tilde{D}} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv}$$

den allmänna variabelbytesformeln

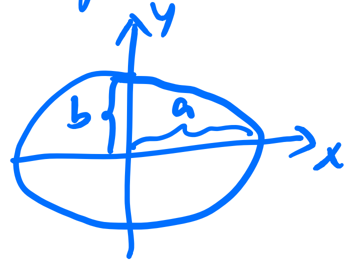
Ex. Koordinatbytet

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}$$ $a, b > 0$, konstanter.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab.$$

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = ab\, dudv.$$

Beräkna arean på ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1.$




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1 \iff u^2+v^2 \le 1.$$

enhetscirkelskivan i uv-systemet.

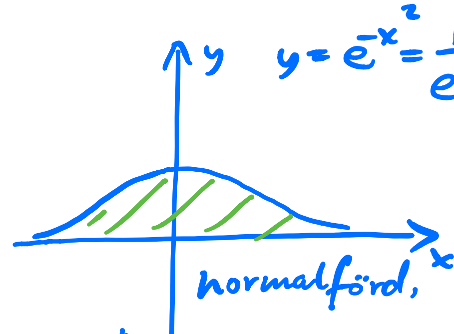
$$\text{arean} = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} dxdy = \iint_{u^2+v^2\le 1} ab\, dudv = ab \iint_{u^2+v^2\le 1} dudv =$$

$$= ab \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi ab.$$

---

En intressant integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$




Lätt att se att $I > 0$.

$I = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-x^2}\,dx$ gen. integral.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

$$\underset{\text{baklänges}}{\overset{\text{produktformeln}}{=}} \iint_{\substack{-\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty}} e^{-x^2-y^2}dxdy = [\text{polära}]$$

$$= \iint_{\substack{0 \le r < \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right](2\pi - 0) = \pi.$$

$$\left.\begin{array}{l} I^2 = \pi \\ I > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I = \sqrt{\pi}.$$