IDAG: vi börjar med vektoranalys.

⟶ Vektorfält

Skalärfält: en vanlig reellvärd funktion i rummet eller planet (t.ex.).
Vi tänker på den som att den har en verklighetsanknytning (fysik).

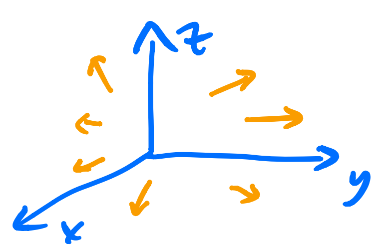
⟶ temperatur i ett rum.

⟶ potentialfält, t.ex. gravitationens.
Även elektriska fält.

Vektorfält

En funktion vars värden är vektorer.

Dvs: en vektor i varje position.



Observera: vektorer har riktning och
utsträckning (längd).

När möter vi vektorfält i verkligheten?

Luftströmmar

Vattenströmmar

Fältlinje: partikelbana
för liten testpartikel i fältet.

Hur kan vi beskriva fältlinjerna?

Måste vara i termer av hur vi beskriver
fältet förstås.

Vektorfält $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3) \underset{\text{vanligt}}{\overset{\text{ganska}}{=}} (P, Q, R)$

Här är alltså F_1, F_2, F_3 skalärfält

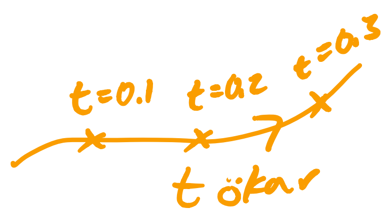
Tillsammans bildar de en vektor $\bar{F}$ som
varierar med positionen, dvs ett vektorfält
(v.f.).

Fältlinjer då? Ska ju vara kurvor.
Hur brukar vi beskriva kurvor?

Parametrisering: $\bar{r} = (x, y, z)$

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$$ t parameter

samma som: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



Notera att parameter-framställningen inte är entydig!

$\bar{r}'(t)$ = vektor som beskriver hastigheten $\bar{v}(t)$.

Fältlinjer: $\bar{r}'(t)$ ska gå i riktningen av fältet $\bar{F}$ i punkten $\bar{r}(t)$.

$$\boxed{\bar{r}'(t) = \lambda(t)\bar{F}(\bar{r}(t))}, \quad \lambda(t) \neq 0.$$
> helst

När vi vill lösa denna differentialekvation så bekymrar det oss att $\lambda(t)$ kan få variera, men formen på kurvan ska väl inte variera?

Hur löser vi?

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\Rightarrow \quad \bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = \lambda\left(F_1(\bar{r}(t)), F_2(\bar{r}(t)), F_3(\bar{r}(t))\right)$$

dvs
$$\begin{cases} x'(t) = \lambda F_1 \\ y'(t) = \lambda F_2 \\ z'(t) = \lambda F_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} \\ y' = \dfrac{dy}{dt} \\ z' = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$ ger att

$$\begin{cases} dx = \lambda F_1\, dt \\ dy = \lambda F_2\, dt \\ dz = \lambda F_3\, dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{F_1} = \lambda\, dt \\ \qquad \| \\ \dfrac{dy}{F_2} = \lambda\, dt \\ \qquad \| \\ \dfrac{dz}{F_3} = \lambda\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}}$$ fältlinje-ekvationen utan λ.

Är detta användbart?

Ex. $\bar{F} = (\underbrace{xz}_{F_1}, \underbrace{2x^2z}_{F_2}, \underbrace{x^2}_{F_3})$

$$\begin{cases} F_1 = xz \\ F_2 = 2x^2z \\ F_3 = x^2 \end{cases}$$

Hitta fältlinjerna!

Fältlinjeekvationen ger

$$\frac{dx}{xz} = \boxed{\frac{dy}{2x^2z} = \frac{dz}{x^2}}$$ mult med $2x^2$:

$$\boxed{\frac{dy}{z} = 2dz}$$ mult med z:

$dy = 2z\,dz$ hur lösa?

$d(z^2) = 2z\,dz$ $\frac{d(z^2)}{dz} = (z^2)'_z = 2z$ förläng med dz

$dy - d(z^2) = 0$

$d(y - z^2) = 0$

$\boxed{y - z^2 = C_1}$ konstant

$d(z^2)$?

$(z+h)^2 - z^2 =$

$= \cancel{z^2} + 2hz + h^2 - \cancel{z^2}$

$= 2hz + \cancel{h^2}$

$h \rightsquigarrow dz$

h^2 mkt mindre än h

$2hz \rightsquigarrow 2z\,dz$

Nästa ekvation:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{x^2} \Rightarrow [\text{mult. med } x^2z]$$

$$x\,dx = z\,dz$$

mult med 2: $2x\,dx = 2z\,dz$

flytta över: $2x\,dx - 2z\,dz = 0$.

$$\begin{cases} d(x^2) = 2x\,dx \\ d(z^2) = 2z\,dz \end{cases} \qquad \boxed{d(x^2 - z^2) = 0}$$

Lösn. $\boxed{x^2 - z^2 = C_2.}$

Kombinera: $\begin{cases} y - z^2 = C_1 \Rightarrow y = C_1 + z^2 \\ x^2 - z^2 = C_2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{C_2 + z^2} \end{cases}$

Vi kan använda z som parameter t:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{C_2 + t^2} & \text{(två kurvor)} \\ y = C_1 + t^2 \\ z = t \end{cases}$$

Vektorfält i alternativa koordinatsystem

Planet, polära koordinater.

$$\bar{F} = (F_1, F_2) = F_1 \underbrace{(1,0)}_{\bar{i}} + F_2 \underbrace{(0,1)}_{\bar{j}} =$$

$$= F_1 \bar{i} + F_2 \bar{j}.$$

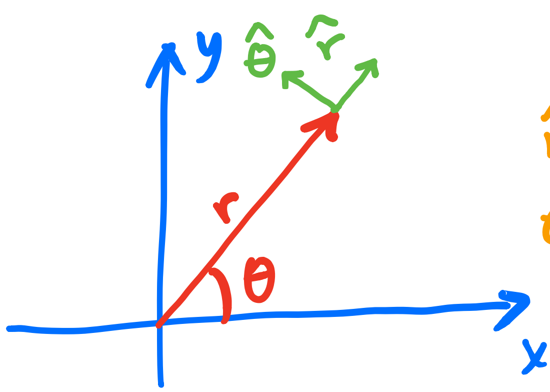
$\begin{cases} \bar{i} & \text{är den riktning där } x \text{ växer snabbast.} \\ \bar{j} & \text{" " " } y \text{ " "} \end{cases}$

$\begin{cases} \hat{x} & \text{riktningen för max växt av } x \\ \hat{y} & \text{" " " " } y \end{cases}$

$\hat{x} = \bar{i}$

$\hat{y} = \bar{j}$

Polära koordinater då?



$\hat{r} = ?$

$\hat{\theta} = ?$

riktningar

$|\hat{r}| = 1$ } enhets-

$|\hat{\theta}| = 1$ } vektorer.

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Snabbast uppåt: gradientens riktning

$$\hat{r} = \frac{\nabla r}{|\nabla r|} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ [lite kalkyl]

Obs! $\hat{r}$ och $\hat{\theta}$ är riktningar som pekar åt olika håll beroende på var vi är någonstans.

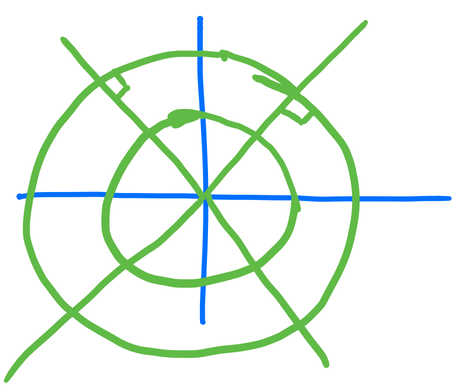
Men de har vissa intressanta egenskaper:

$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ rätvinkligt kroklinjigt koordinatsystem.

$\hat{r} \perp \hat{\theta}$

$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) =$

$= \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta = 0.$



$\bar{r} = (x, y) \Rightarrow d\bar{r} = (dx, dy)$

$\bar{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad d\bar{r} = (d(r\cos\theta), d(r\sin\theta))$

$$d\bar{r} = \begin{bmatrix} d(r\cos\theta) = \cos\theta\, dr + r(-\sin\theta)\, d\theta \\ d(r\sin\theta) = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$

$$= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta,\ \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)$$

$$= (\cos\theta, \sin\theta)\, dr + (-r\sin\theta, r\cos\theta)\, d\theta =$$

$$= \hat{r}\, dr + r\,\hat{\theta}\, d\theta.$$

Komprimera: $\boxed{d\bar{r} = \hat{r}\, dr + r\,\hat{\theta}\, d\theta}$

$\bar{F} = (F_1, F_2)$ vektorfält

$\bar{F} = F_r\,\hat{r} + F_\theta\,\hat{\theta}$, F_r & F_θ skalärfält

Fältlinjeekvationen i polära koordinater:

$$\boxed{\frac{dr}{F_r} = \frac{r\,d\theta}{F_\theta}}$$

<u>Ex.</u> $\bar{F} = \underbrace{1}_{F_r} \cdot \hat{r} + \underbrace{1}_{F_\theta} \cdot \hat{\theta}$. Hitta fältlinjerna!

$\begin{cases} F_r = 1 \\ F_\theta = 1 \end{cases}$ Fältlinjeekv. $\dfrac{dr}{1} = \dfrac{r\,d\theta}{1}$

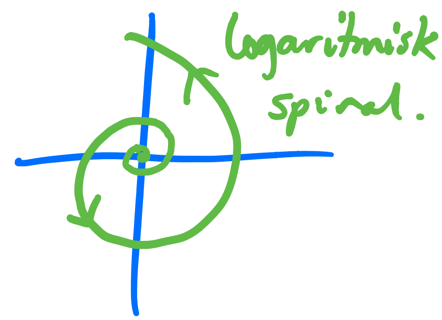
$$\frac{dr}{r} = d\theta \quad \text{dvs} \quad \frac{dr}{r} - d\theta = 0$$

$$d(\ln r) = \frac{1}{r}\,dr$$

$$d(\ln r - \theta) = 0 \iff \ln r - \theta = C$$

$$\ln r = C + \theta$$

$$r = e^{C+\theta} \quad \text{spiral.}$$



Gradienten

ϕ skalärfält i 3 dim

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \quad \text{v.f.}$$

$$\underset{\text{s.f.}}{\phi} \xrightarrow{\nabla} \underset{\text{v.f.}}{\nabla\phi} \quad \underline{\text{gradientfält}}$$

Fråga: är alla v.f. på formen $\nabla\phi$?

Det är inte så!

I 2 dim $\bar{F} = (F_1, F_2)$

om $\bar{F} = D\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$

$$\begin{cases} F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$$

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$ ger

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}}$$ villkor!

måste inte vara uppfyllt!

DEF $\bar{F}$ är konservativt om $\bar{F} = D\phi$ för något skalärfält.

OBS! Många fält inom fysiken är konservativa. Gravitation, Elektriskt fält.

Ex. Gravitation $\bar{F} = -km \frac{\bar{r} - \bar{r}_0}{|\bar{r} - \bar{r}_0|^3}$

$\bar{r}_0$ är positionen för en fix massa.
$k > 0$ konstant.
$\bar{r}$ är (x,y,z)-positionen

$$\phi = \frac{km}{|\bar{r}-\bar{r}_0|} \Rightarrow \nabla\phi = \bar{F}.$$

Nödvändiga villkor för konservativitet i 3 dim. Tre villkor: $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}}$$

Kommer ur att de mixade derivatorna är oberoende av deriveringsordning.

Ex. (2 dim) $\bar{F} = (F_1, F_2) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$
(magnetfält) Visa att

(a) $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ utom i origo.

(b) Om $\phi = \theta$ så $\nabla\phi = \nabla\theta = \bar{F}$.

Problemet är att Θ har en förgrening i origo