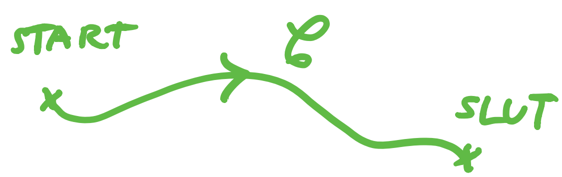
KURVINTEGRALER

Hittills: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ envariabelkursen

$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ flervariabelkursen

Nu: $\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy \\ \text{alt.} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{C}} f\,ds \end{cases}$

$\mathcal{C}$: kurva med riktning.



kurvan i planet eller i rummet (eller t.o.m. i högre dimensioner).

ds : båglängdselementet.

Hur beskriver vi kurvor?

Parameter-framställning

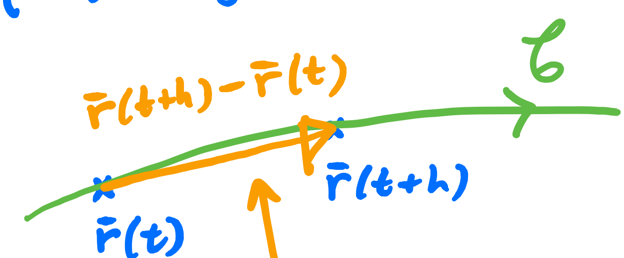
$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$, t parameter

I 2 dim $\bar{r} = (x, y)$

3 dim $\bar{r} = (x, y, z)$

<u>Vår uppgift</u>: beskriv hur man räknar ut kurvintegraler m h a parametrisering. Därefter förstå varför valet av parametrisering är oväsentligt.

$$\begin{cases} ds = |\bar{r}'(t)|\, dt. \\ \left.\begin{aligned} dx &= x'(t)\, dt \\ dy &= y'(t)\, dt \end{aligned}\right\} \quad x'(t) = \frac{dx}{dt},\ y'(t) = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$



"ds" Längd(Linjesegment) $= \underbrace{|\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)|}_{\approx h\bar{r}'(t)} \approx$

$|h\bar{r}'(t)| = h|\bar{r}'(t)|$

$h > 0$

$f(t+h) - f(t) \approx h f'(t)$

om $h \approx 0$

$h \rightsquigarrow dt$

$$\boxed{ds = |\bar{r}'(t)|\, dt}$$

Kurvors längd: $\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b |\bar{r}'(t)|\, dt$

samma svar för alla parametriseringar

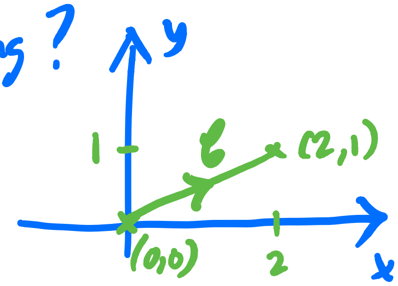
$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\bar{r}(t))\, |\bar{r}'(t)|\, dt}$$

Ex. $I = \int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\, ds = ?$

$\mathcal{C}$ = linjestycket från $(0,0)$ till $(2,1)$.

parametrisera $\mathcal{C}$:

Räta linjers parametrisering?



$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v}$

$\bar{r}_0$: en punkt på linjen

$\bar{v}$: riktningen

Vi väljer $\begin{cases} \bar{r}_0 = (0,0) \\ \bar{v} = (2,1) \end{cases}$

$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v} = (0,0) + t(2,1) = \overbrace{(2t, t)}^{\bar{r}'(t) = (2,1)}$.

$0 \leq t \leq 1$. $\quad ds = |\bar{r}'(t)|\,dt =$

$$I = \int_{\mathscr{C}} (x^2+y^2)\,ds = \int_0^1 (x^2+y^2)|\bar{r}'(t)|\,dt =$$

$$= \int_0^1 (x^2+y^2)\underbrace{|(2,1)|}_{\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}}dt = \sqrt{5}\int_0^1 (x^2+y^2)\,dt$$

$$= \left[\begin{array}{l} \bar{r}(t) = (2t, t) \\ x(t) = 2t,\ y(t) = t \end{array}\right] = \sqrt{5}\int_0^1 \big(\underbrace{(2t)^2 + t^2}_{(4+1)t^2}\big)\,dt$$

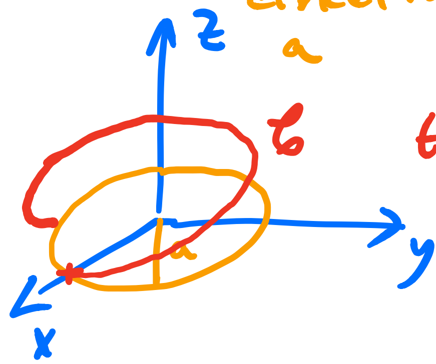
$$= \sqrt{5}\int_0^1 5t^2\,dt = \sqrt{5}\left[\frac{5t^3}{3}\right]_0^1 = \sqrt{5}\left(\frac{5}{3} - 0\right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Ex. Hitta tyngdpunkten för spiralhelixen

$\mathcal{C}: \quad \bar{r} = (\underbrace{a\cos t,\ a\sin t}_{\text{cirkel radie } a},\ bt),\ 0 \le t \le 2\pi.$

$a, b > 0$ antas.



tänk: metalltråd med konstant täthet

Hur räknar vi ut tyngdpunkter?

$(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle)$ tyngdpunkten

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{\mathcal{C}} x\, ds}{\int_{\mathcal{C}} ds}, \quad \langle y \rangle = \frac{\int_{\mathcal{C}} y\, ds}{\int_{\mathcal{C}} ds}$$

$$\langle z \rangle = \frac{\int_{\mathcal{C}} z\, ds}{\int_{\mathcal{C}} ds}.$$

$$ds = |\vec{r}\,'(t)|\,dt = |(-a\sin t, a\cos t, b)|\,dt$$

$$= \sqrt{\underbrace{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}_{\text{trig identity}:\ a^2} + b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,\Big[t\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} x\,ds &= \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \\ &= a\sqrt{a^2+b^2}\,\Big[\sin t\Big]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}\right\} \langle x\rangle = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} y\,ds &= \int_0^{2\pi} a\sin t\,\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \\ &= a\sqrt{a^2+b^2}\,\Big[-\cos t\Big]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}\right\} \langle y\rangle = 0$$

$$\int_{\mathcal{C}} z\,ds = \int_0^{2\pi} bt \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,dt = b\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

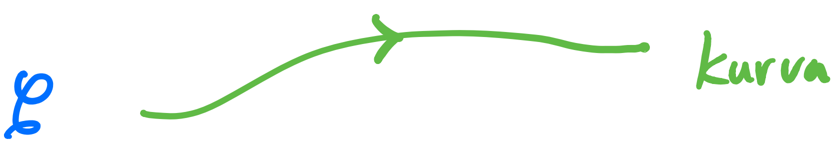
$$= 2\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\langle z\rangle = \frac{\int_{\mathcal{C}} z\,ds}{\int_{\mathcal{C}} ds} = \frac{2\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \pi b.$$

tyngdpunkten : $(0, 0, \pi b)$.

ARBETSINTEGRALER

Fält $\bar{F}$ (vektorfält) kraft



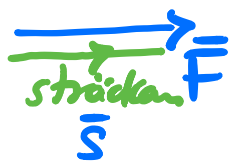
Fältet arbetar $\rightsquigarrow$ för över energi till partiklar

energi = kraft · sträcka

J = Nm N m

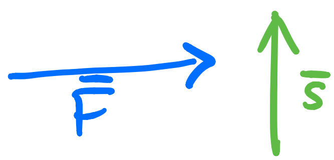
Räkna ut energiöverföringen över korta sträckor och lägga ihop!

Vad är det som ska läggas ihop?



Fältet och sträckan parallella

$$|\bar F||s| = E.$$



$\bar F$ och $\bar s$ vinkelräta

$$E = 0.$$

$$\boxed{E = \bar F \cdot \bar s}$$

Infinitesimalt: $dE = \bar F \cdot \underbrace{d\bar r}_{\text{liten förflyttning}}$

Lägg ihop: $$\boxed{\int_{\mathcal{C}} dE = \int_{\mathcal{C}} \bar F \cdot d\bar r}$$

Arbetsintegral, beskriver arbetet som fältet för över till partikeln längs med banan $\mathcal{C}$.

$\bar{F} = (P, Q, R)$ alt (F_1, F_2, F_3).

$d\bar{r} = (dx, dy, dz)$

$\bar{r} = (x, y, z)$

$\bar{F} \cdot d\bar{r} = (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) =$

$= P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

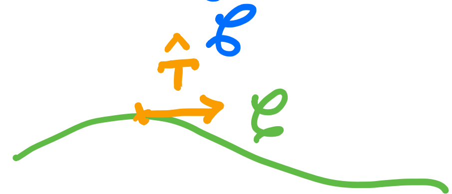
Vi skriver alltså alternativt

$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ för

arbetsintegralen $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$.

Hur ser förhållandet mellan $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$

och $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ ut?



$d\bar{r} = \hat{T}\,ds$, $|\hat{T}| = 1$

$\hat{T}$ tangentialvektor

$|d\bar{r}| = ds.$ $\qquad d\bar{r} = \underbrace{\frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|}}_{\hat{T}} \overbrace{|d\bar{r}|}^{ds}$

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = \bar{F}\cdot\hat{T}\,ds = (\bar{F}\cdot\hat{T})\,ds$$

dvs

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{(\bar{F}\cdot\hat{T})}_{f}\,ds}$$

$\left.\begin{array}{l}\bar{F} \text{ vf} \\ \hat{T} \text{ vf längs } \mathcal{C}.\end{array}\right\}$ $\bar{F}\cdot\hat{T}$ skalärf. längs $\mathcal{C}$.

Oftast enklare att räkna ut arbetsintegraler direkt med parametrisering.

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_a^b \underbrace{\bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t)}_{\text{skalärprodukt}}\,dt$$

SLUTNA KURVOR

I planet skriver vi $\ointctrclockwise$ för en sluten kurva i pos led. Motsv. $\ointclockwise$ i neg led.

Detta funkar bara i planet!

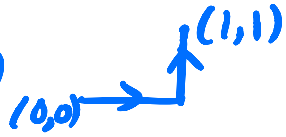
I rummet använder vi $\oint$ för en sluten kurva.

$\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ kallas för fältet $\bar{F}$:s cirkulation runt $\mathcal{C}$.

Ex. $\bar{F} = (y^2, 2xy)$ i 2dim.

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = ? \quad \text{där } \mathcal{C} : (0,0) \rightsquigarrow (1,1)$$

som (a) räta linjen, (b) $y = x^2$-kurvan,

(c) 

Lösn. parametrisera och räkna!

Intressant att svaret blir $= 1$ för alla fallen. Finns det anledning till det?

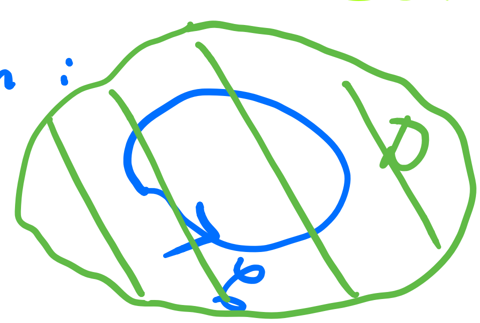
Om $\bar{F}$ är konservativt är det så!

dvs $\bar{F} = \nabla \phi$. I detta fall:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 \\[2mm] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy \end{cases}$$

$\phi = xy^2$ funkar!

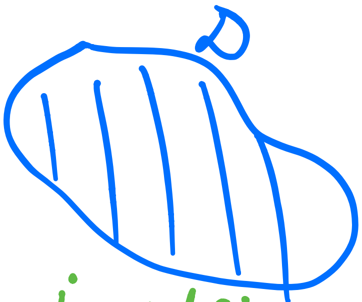
Inramning av problem:

Kurva inuti ett givet område $\mathcal{D}$.



Typer av områden :

(a)



inget hål
sammanhängande

(b)

hål

(c)

osammanhängande
öar.

FRÅGA : När blir $\int_{C} \bar{F} \cdot dr$ oberoende av vägen ?

(dvs beror på beg punkt och slutpunkt bara)

Besvaras av följande :

<u>SATS</u>. D antas öppet och sammanhäng-ande.

$\bar{F}$ antas vara ett C^1-glatt vektorfält på D.

Då är följande ekvivalenta:

(a) $\bar{F}$ är konservativt på D $(\bar{F} = \nabla\phi)$

(b) $\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ för alla $\mathcal{C}$ i D (slutna)

(c) $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ är oberoende av vägen

Dessutom:

$$\int_{P_0}^{P_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} \overset{\bar{F} = \nabla\phi}{=} \phi(P_1) - \phi(P_0) = \Big[\phi(P)\Big]_{P_0}^{P_1}.$$