IDAG: ① fortsätta diskutera konservativa fält

② Introducera ytintegraler.

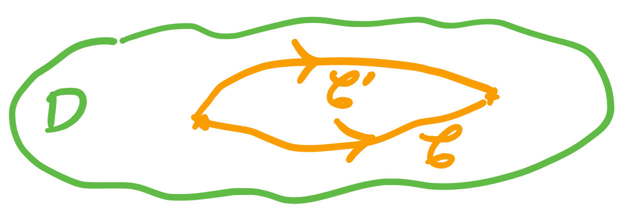
Saken om konservativa fält:

SATS Följande utsagor är ekvivalenta:

(a) $\bar{F}$ är konservativt på D [dvs $\bar{F} = \nabla\phi$]

(b) $\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$ inuti D

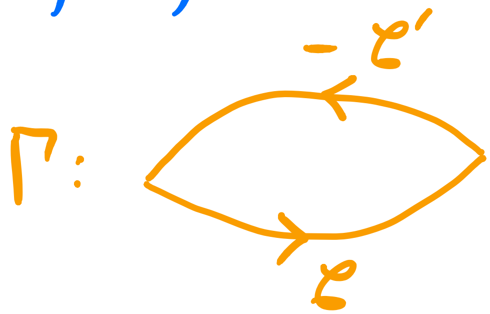
(c) $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ är oberoende av vägen om $\mathcal{C}$ är en kurva inuti D.



$$\int_{\mathcal{C}} \stackrel{?}{=} \int_{\mathcal{C}'}$$

Bygg en loop $\Gamma = \mathcal{C} - \mathcal{C}'$: gå längs $\mathcal{C}$

därefter fortsätta i motsatt riktning längs $\mathcal{C}'$.



Γ sluten kurva.

$$\int_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} \overset{(b)}{=} 0$$

$$\Vert$$

$$\int_{\mathcal{C}} - \int_{\mathcal{C}'}$$

dvs : $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\mathcal{C}'} \bar{F}\cdot d\bar{r}$

$\therefore$ (b) $\Rightarrow$ (c).

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \Big[\phi(P)\Big]_{P=P_0}^{P=P_1}$$

$P=P_1$ slutpunkt

$P=P_0$ startpunkt

(c) $\Rightarrow$ (b) : deformera om den slutna kurvan så den blir kort.

<u>Ex.</u> Betrakta vektorfältet

$$\bar{F} = \left(Ax\sin\pi y,\ x^2\cos\pi y + Bye^{-z},\ y^2e^{-z}\right).$$

För vilka värden på konstanterna A och B blir $\bar{F}$ konservativt?

För dessa värden, beräkna $\int_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r}$, där $\mathcal{C}$ är kurvan med parameterframställning

(a) $\bar{r} = (\cos t, \sin(2t), \sin^2 t)$, $0 \le t \le 2\pi$,

(b) Kurvan är snittet av paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ och planet $z = 3x - 2y$ från $(0,0,0)$ till $(1, \frac{1}{2}, 2)$.

Lösn. $\bar{F} = (P, Q, R)$

$$\begin{cases} P = Ax\sin\pi y \\ Q = x^2\cos\pi y + Bye^{-z} \\ R = y^2e^{-z}. \end{cases}$$

$\bar{F}$ konservativt $\Leftrightarrow$ $\bar{F} = \nabla\phi$, ϕ potential

$$\boxed{P = \frac{\partial\phi}{\partial x},\quad Q = \frac{\partial\phi}{\partial y},\quad R = \frac{\partial\phi}{\partial z}.}$$

Mixade andraderivatorna av ϕ är oberoende av deriveringsordning:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \end{cases}$$

Stoppa in våra uttryck:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(Ax \sin \pi y) = Ax\pi \cos \pi y =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos \pi y + Bye^{-z}) =$$

$$= 2x \cos \pi y + 0$$

Detta ger att $A = \frac{2}{\pi}$.

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 e^{-z}) = 2ye^{-z} = \frac{\partial Q}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(x^2 \cos \pi y + Bye^{-z}) = 0 + Bye^{-z}(-1)$$

$$\Rightarrow \quad B = -2.$$

Sista villkoret : $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(Ax \sin \pi y)}_{=0} \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y^2 e^{-z})}_{=0} \quad \text{ok.}$$

Fått fram att $A = \frac{2}{\pi}$, $B = -2$.

Vid konservativt fält gäller att

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \Big[\phi(P)\Big]_{P_0}^{P_1}.$$

Kan vi hitta ϕ ?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = P = \dfrac{2}{\pi} x \sin \pi y & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = Q = x^2 \cos \pi y - 2y e^{-z} & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = R = y^2 e^{-z} & (3) \end{cases}$$

(1) ger $\phi = \dfrac{x^2}{\pi} \sin \pi y + C_1(y,z)$

(2) ger $\phi = \dfrac{x^2}{\pi} \sin \pi y - y^2 e^{-z} + C_2(x,z)$

(3) ger $\phi = -y^2 e^{-z} + C_3(x,y)$.

Förslag: $\boxed{\phi = \frac{x^2}{\pi}\sin \pi y - y^2 e^{-z}.}$ funkar.

(a) Sluten kurva $\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$.

(b) från $(0,0,0)$ till $(1,\frac{1}{2},2)$:

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},2)} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \Big[\phi\Big]_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},2)} =$$

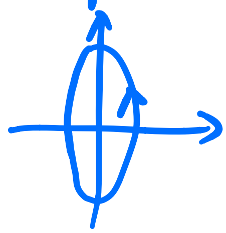
$$= \Big[\frac{x^2}{\pi}\sin \pi y - y^2 e^{-z}\Big]_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},2)} =$$

$$= \frac{1^2}{\pi}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{1/4} e^{-2} - \left(\frac{0^2}{\pi}\sin 0 - 0^2 e^{-0}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}e^{-2}.$$

Ex. $$\oint_{\mathcal{C}} (\underbrace{e^x \sin y + 3y}_{P})\,dx + (\underbrace{e^x \cos y + 2x - 2y}_{Q})\,dy = ?$$ 2dim

$\mathcal{C}$: ellipsen $4x^2+y^2=4$ moturs.



Lösn. Första tanken: är fältet konservativt?

$$\begin{cases} P = e^x \sin y + 3y \\ Q = e^x \cos y + 2x - 2y \end{cases}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ?$$

$$e^x \cdot \cos y + 3 = e^x \cos y + 2 - 0 \quad \text{FALSKT}$$

3 istället för 2 på vänster sida!

Byt P: $\quad P_1 = e^x \sin y + 2y$.

Integralen vi söker

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\mathcal{C}} y\,dx + \int_{\mathcal{C}} \underbrace{\overbrace{P_1\,dx + Q\,dy}^{=0}}_{(P_1,\,Q)\ \text{konservativt}}$$

$$= \int_{\mathcal{E}} y\,dx = \text{arean innanför} =$$

$$= \pi ab = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi.$$

a, b längderna på huvudaxlarna av ellipsen.

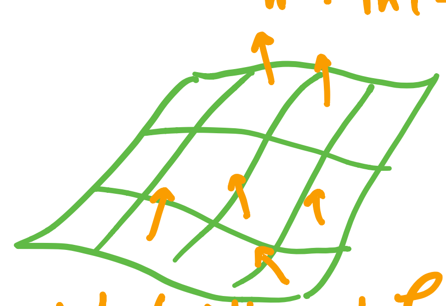
YTINTEGRALER

$$\iint_{\mathcal{S}} f\,dS \qquad \text{alt.}$$

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} (\bar{F} \cdot \bar{n})\,dS = \iint_{\mathcal{S}} \bar{F} \cdot d\bar{S}}$$ flödes-integral

$\mathcal{S}$: yta i 3 dim.

$\bar{n}$: $|\bar{n}| = 1$



vinkelrätt mot $\mathcal{S}$

två möjligheter

Först: $\iint_S f\,dS = ?$

dS = ytelementet

OBS! ds i samband med kurvintegraler
dS " " " ytintegraler

s = "strecke"
S = "surface"

Hur räknar vi ut $\iint_S f\,dS$?

Hur beskriver vi ytor?
① parametrisering
② ekvation $G=0$.

$\bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ i planet

Ex: $\bar{r}(u,v) = (uv, u^2, v^2)$, $(u,v): u^2+v^2 \le 1$.
En yta i rummet.

(u,v) blir lokala koordinater på ytan!

$$\boxed{\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right| du\,dv = dS.}$$

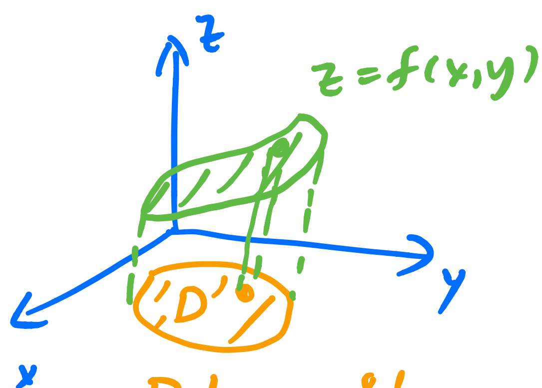
$$\boxed{\bar{n} = \pm \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right|}}$$

OBS: $u \leftrightarrow v$ ger teckenbyte i kryssprodukten

$|\bar{n}| = 1$ automatiskt.

GRAFYTOR

$z = f(x,y)\,, \quad (x,y) \in D.$



D basområde.

Parametrisera enklast möjligt:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \qquad \bar{r} = (u, v, f(u,v))$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = (1, 0, f'_u), \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (0, 1, f'_v)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (1, 0, f'_u) \times (0, 1, f'_v)$$

$$\overset{\text{kalkyl}}{=} (-f'_u, -f'_v, 1)$$

$$dS = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| \, du\,dv = |(-f'_u, -f'_v, 1)| \, du\,dv$$

$$= \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2} \, du\,dv = [\text{Gå tillbaka } x,y]$$

$$= \underbrace{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}_{\text{skevningsfaktor} \geq 1} \, dx\,dy.$$

Ytelementet om S ges av ekvationen $G(x,y,z) = 0$. Tänk $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Areaelementet ?

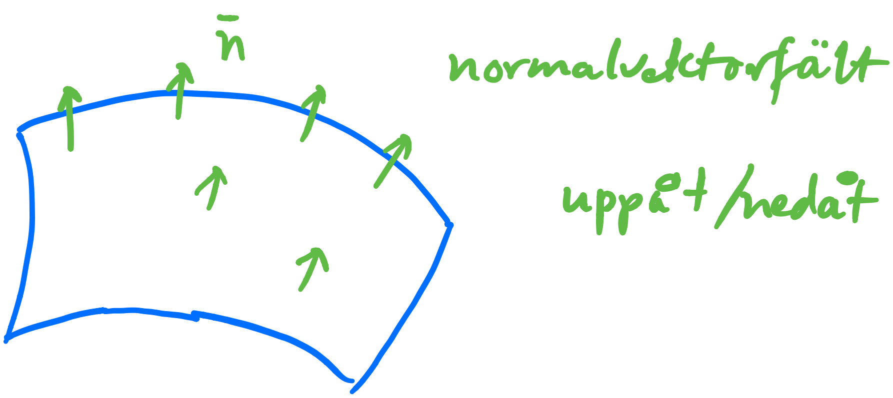
$$\frac{|\nabla G|}{|G'_z|} \, dx\,dy = dS. \quad (\text{analogt med grafytor})$$

$d\bar{S} = \bar{n}\, dS$ kallas det orienterade areaelementet.

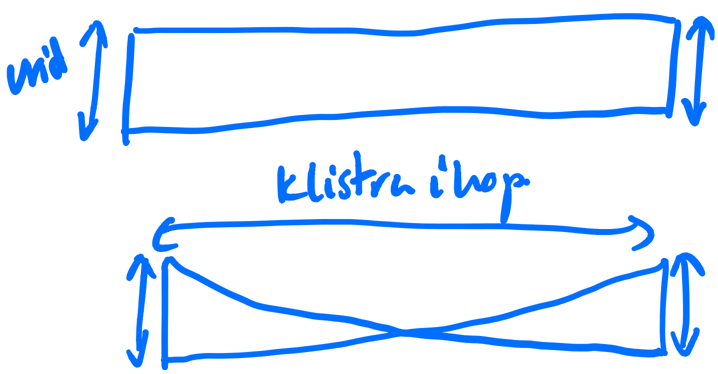
$$d\bar{S} = \bar{n}\, dS = \pm \frac{\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'}{|\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'|}\, |\bar{r}_u' \times \bar{r}_v'|\, du\, dv =$$

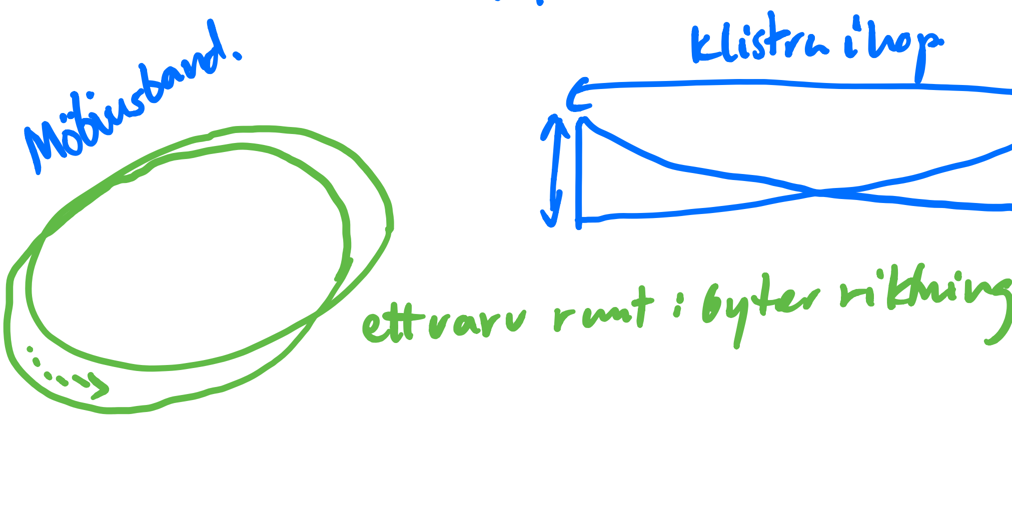
$$= \pm\, \bar{r}_u' \times \bar{r}_v'\, du\, dv$$ snygg formel.

Ytor och orientering.



Kluriga ytor :





Möbiusbandet är inte orienterbart.

Finns även Kleinflaskan!

Satserna om flödesintegraler avser enbart orienterbara ytor.

$$\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} \, dS$$ förutsätter att $\bar{n}$ kan definieras på ett vettigt vis.