IDAG: flödesintegraler, forts.

Komma in på: Rotation och divergens

Relationer till flödesintegraler och arbetsintegraler.

Flödesintegraler

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S}$$

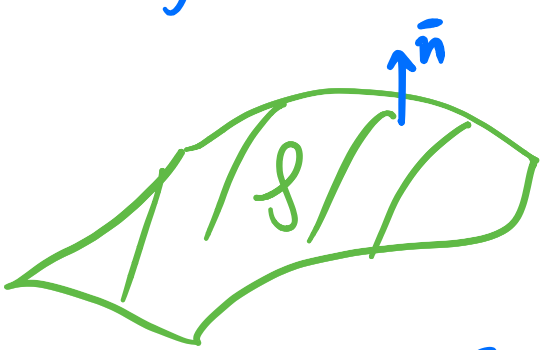
$\bar{F}$ v.f.

$\bar{n}$ normal mot S

$d\bar{S} = \bar{n}\, dS$

dS = ytelementet

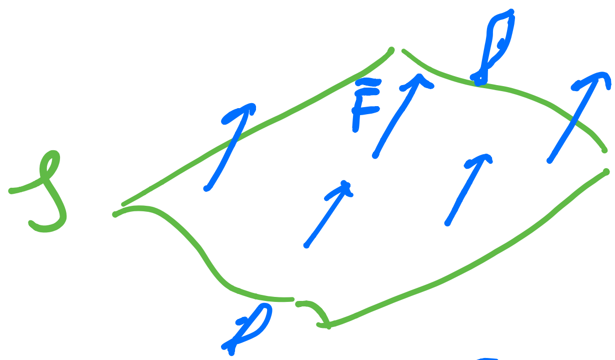
Kom ihåg: $\bar{F} \cdot d\bar{S} = (\bar{F} \cdot \bar{n})\, dS$



Vad mäter $\bar{F} \cdot \bar{n}$?

Den del av v.f. (=kraften) som påverkar partikeln, mäter genomströmning av v.f. genom ytan. Genomströmningen kallar vi för ett <u>flöde</u>.

Om vi tänker en elementär modell där $\bar{F}$ står för rörelsen i ett fiskstim?



inte vinkelrätt mot S.

$\bar{F} \cdot \bar{n}$ mäter flödet av fisk genom nätet genom den givna punkten.

$$\iint_S \overset{N}{\bar{F}} \cdot \bar{n} \, d\overset{m^2}{S} = \text{totala fiskflödet genom } S.$$

Om $\bar{F}$ mäts i N, så blir flödet mätt i Nm^2.

Enkla modellen: $\bar{F}$ mäts i fisk/$(m^2 s)$

$$\Phi = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n}\, dS$$

$[\text{phi}] \qquad \frac{\text{fisk}}{m^2 s} \qquad m^2 \qquad \frac{\text{fisk}}{s}$

Klassiska fält

$$\bar{F} = m \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$$ gravitation, elektriskt fält

Beräkna flödet utåt genom sfären med radie a med centrum i origo.

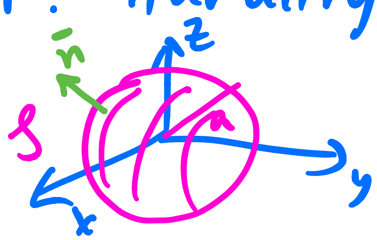
Lösn.
$$\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n}\, dS = ?$$

S: sfären $x^2+y^2+z^2=a^2$

I termer av $\bar{r}=(x,y,z)$: $|\bar{r}|=a$

$$|\bar{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$\bar{n}$: normalvektorfältet på S, riktad utåt. Hur uttrycker vi $\bar{n}$?



Gradienten av G pekar i normalens riktn.

Kom ihåg: yta $G=0$ normalriktn. ges av $\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$. $G = x^2+y^2+z^2-a^2$.

$$\nabla G = (2x, 2y, 2z)$$

normalisera:

$$\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{(2x,2y,2z)}{|(2x,2y,2z)|} =$$

$$= \frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|} = \frac{\overbrace{(x,y,z)}^{\bar r}}{a} = \bar n \text{ pekar utåt}$$

$$\bar F = m\frac{\bar r}{|\bar r|^3} = [\text{på } S] = m\frac{\bar r}{a^3}$$

$$\bar F \cdot \bar n = m\frac{\bar r}{a^3}\cdot\frac{\bar r}{a} = m\frac{\overbrace{\bar r\cdot\bar r}^{|\bar r|^2 = a^2}}{a^4} = \frac{m}{a^2}.$$

$$\Phi = \iint_S \bar F\cdot\bar n\, dS = \iint_S \frac{m}{a^2}\, dS = \frac{m}{a^2}\iint_S dS =$$

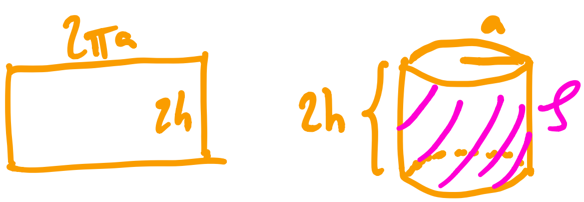
$$= \frac{m}{a^2}\,\text{area}(S) = \frac{m}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi m.$$

Att notera: Flödet blir samma för alla radier a.

Liknar vad vi fick för konservativa fält.

Ex. $\bar{F} = (x, y, z)$ $\quad G = x^2+y^2-a^2=0$

S : cylinderytan $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=a^2 \\ -h \le z \le h. \end{array}\right\}$



konservburksyta utan lock.

area$(S) = 2\pi a \cdot 2h$
$= 4\pi a h$

Beräkna flödet utåt.

Lösn. $\bar{F}$ har vi. $\quad \bar{n} = ?$

$\bar{F} \cdot \bar{n} = ?$ $\qquad \bar{n} = \pm \dfrac{\nabla G}{|\nabla G|}$ $\qquad \nabla G = (2x, 2y, 0)$

$$\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{(2x,2y,0)}{|(2x,2y,0)|} =$$

$$= \frac{(x,y,0)}{|(x,y,0)|} = \frac{(x,y,0)}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{=a^2}}} = \frac{(x,y,0)}{a}.$$

pekar utåt

Välj:

$$\bar{n} = \frac{(x,y,0)}{a}.$$

$$\bar{F} \cdot \bar{n} = (x,y,z) \cdot \frac{(x,y,0)}{a} = \frac{1}{a}(x^2+y^2+z \cdot 0)$$

$$= \frac{1}{a}\,(\underbrace{x^2+y^2}_{=a^2}) = [\text{på } \mathcal{S}] = \frac{a^2}{a} = a.$$

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \bar{F}\cdot\bar{n}\, dS = \iint_{\mathcal{S}} a\, dS = a\iint_{\mathcal{S}} dS =$$

$$= a\cdot \text{area}(\mathcal{S}) = a\cdot 4\pi a h = 4\pi a^2 h.$$

Efter pausen: ∇, div $= \nabla\cdot$, rot $= \nabla\times$
curl

Kom ihåg

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ utan att agera på en fn.

$$\nabla h = \text{grad}\, h.$$

$$\text{div}\,\bar{F} = \nabla\cdot\bar{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R$$

div $\bar{F}$ blir ett skalärfält

$\bar{F}$ var ett v.f.

Lite om notation: $\operatorname{div}\bar{F} = \nabla\cdot\bar{F}$

kan jämföras med $\bar{F}\cdot\nabla$, ett uttryck vi har sett förut.

$$\underbrace{\nabla\cdot\bar{F}}_{\operatorname{div}\bar{F}} \neq \underbrace{\bar{F}\cdot\nabla}_{(P,Q,R)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=}$$

$(\bar{F}\cdot\nabla)h = P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y} + R\frac{\partial h}{\partial z}$

$$= P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}.$$ diff op

$$\neq \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$ funktion

Ex. $\bar{F} = (x,y,z) \Rightarrow \operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} =$

$= 1+1+1 = 3.$

Ex. $\bar{F} = (x^2-y^2, xy, z^2) \Rightarrow$

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) =$$

$$= 2x + x + 2z = 3x + 2z.$$

Rotationen $\operatorname{rot}\bar{F} = \nabla\times\bar{F}$

$\operatorname{curl}\bar{F}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$i = (1,0,0)$
$j = (0,1,0)$
$k = (0,0,1)$

$$\nabla \times \bar{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q, -\frac{\partial}{\partial x}R + \frac{\partial}{\partial z}P, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\overset{pss}{=} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$\text{rot}\,\bar{F} = \nabla \times \bar{F}$ blir ett v.f.

Specialfall: 2dim. $\bar{F} = (P, Q)$

Problem: varför?

Utvidga $\bar{F} = (P, Q, 0)$. $\begin{cases} P = P(x,y) \\ Q = Q(x,y) \\ R = 0 \end{cases}$

$$\nabla \times \bar{F} = \Big(\underbrace{\frac{\partial R}{\partial y}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z}}_{=0}, -\underbrace{\frac{\partial R}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{=0}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big)$$

$$= \Big(0,\ 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

NOTERA : (a) i 2dim, villkoret $\nabla \times \bar{F} = \bar{0}$ blir bara $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

betyder detta något? Villkoret för konservativt v.f.

(b) i 3 dim, villkoret $\nabla \times \bar{F} = \bar{0}$ blir

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

villkoret för konservativt fält

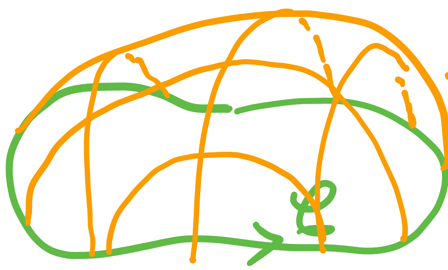
rot $\bar{F} = \bar{0}$ verkar vara nära förknippad med konservativa fält.

Konservativa fält $\equiv \Big[\oint_{\mathcal{C}\ \forall \mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0 \Big]$

Stokes' sats:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot}\bar{F})\cdot \bar{n}\, dS}$$

arbete $=$ flöde $(\operatorname{rot}\bar{F})$



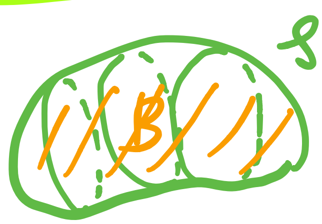
$\mathcal{S}$ någon lämplig yta som avgränsas av $\mathcal{C}$

Huvudsatsen för ytintegraler:

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \bar{F}\cdot\bar{n}\, dS = \iiint_{B} \operatorname{div}\bar{F}\, dV}$$

sluten yta

Gauss' sats eller divergenssatsen



$B =$ korven innanför korvhinnan $\mathcal{S}$.

Hur funkar dessa satser på t.ex.

$\bar{F} = m\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$?

$\operatorname{div}\bar{F} = 0$ (kalkyl)

Men vi räknade ju ut att

$\underset{S}{\oiint} \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS = 4\pi m$ för en sfär av radie a runt origo.

Enligt divergenssatsen borde vi ha att

$$\underset{S}{\oiint} \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS = \underset{B}{\iiint} \operatorname{div}\bar{F}\,dV = \underset{B}{\iiint} 0\,dV = 0.$$

Något är fel! Vad?

Titta på kalkylen: $\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

$P = m\frac{x}{|\bar{r}|^3}$, $Q = m\frac{y}{|\bar{r}|^3}$, $R = m\frac{z}{|\bar{r}|^3}$,

$|\bar{r}|^3 = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial z}\end{array}\right\}$$ finns inte i origo.

Kan något riktigt allvarligt hända i en enda punkt?

$$\boxed{\operatorname{div}\bar{F} = 4\pi m\,\delta_0(x)\,\delta_0(y)\,\delta_0(z)}$$

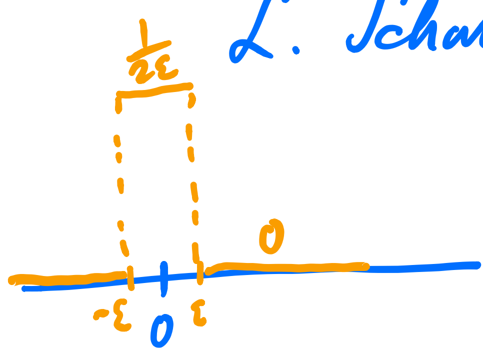
punktmassa $\delta_0(x)$ i origo $x=0$.

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\delta_0(x)\,dx = h(0)$$

"generaliserad" funktion

"distributioner" utv. teori av

L. Schwarz pris på 1950-talet



Låt $\varepsilon \to 0$

$\delta_0'(x)$

Nästa gång: Laplacen, Greens formel

$\begin{cases} \text{divergensfria fält} \\ \text{rotationsfria fält.} \end{cases}$