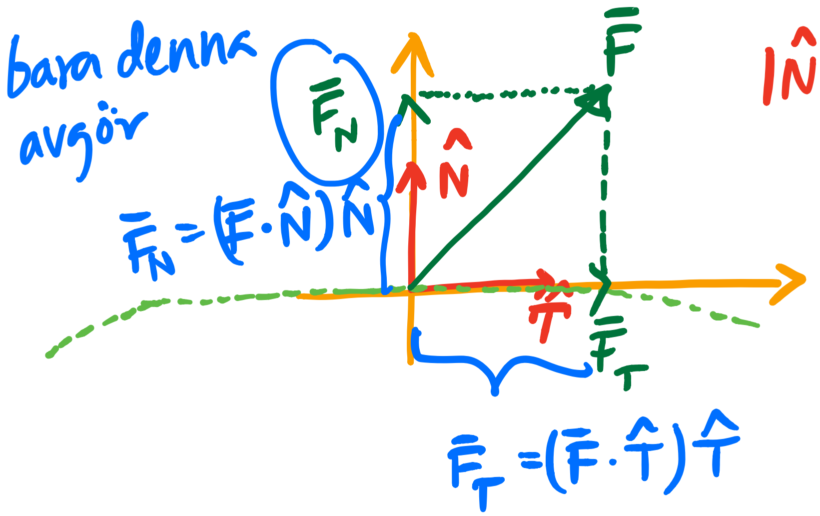
Börja med: komplettera tolkningen av $\bar{F}\cdot\hat{N}$. $\hat{N}$ = normalvektorfältet, normaliserat.



$|\hat{N}| = 1, |\hat{T}| = 1$

Vektoranalys, forts.

PROBLEM: $\bar{F} = m\dfrac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$ gravitationsfält

$$\iint_S \bar{F}\cdot\hat{n}\,dS = 4\pi m$$ om S är sfären $|\bar{r}| = a > 0$.

Hur blir det med andra slutna ytor?
T.ex. om S är en ellipsoid?

Eller en sfär runt en annan punkt?

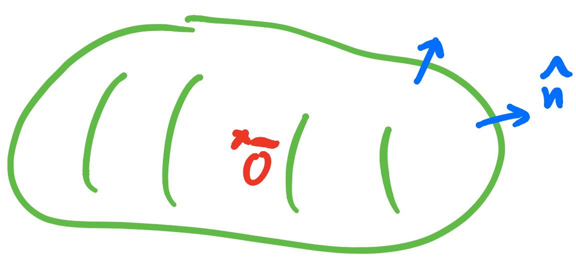
Vi kommer ihåg:

$$\iint_S \bar{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_B \underbrace{\operatorname{div}\bar{F}}_{=0}\,dV$$

problem för $\bar{F}$ var singulär i origo

$4\pi m$ · punktmassa i origo.

Så länge som S går runt origo, dvs $\bar{0} \in B$, så får vi $4\pi m$ som svar.



$$\iint_S \bar{F}\cdot\hat{n}\,dS = 4\pi m \text{ för alla sådana ytor } S.$$

Alternativ approach: skala bort ett

litet hål runt origo, tillämpa då divergenssatsen. För hålet antar vi att det är sfäriskt så för den ytintegralen har vi svaret redan.

---

grad, div, rot

Vilka kombinationer är möjliga?

div grad OK Laplacen $\nabla^2 = \Delta$

grad div OK ?

rot div funkar ej

div rot OK $= 0$

rot grad OK $= \bar{0}$

grad rot funkar ej

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{3dim}$$

∇^2 : skalärfält $\longrightarrow$ skalärfält

utvidga: vektorfält $\longrightarrow$ vektorfält (komponentvis)

$$\bar{F} = (P, Q, R)$$

$$\nabla^2 \bar{F} = (\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R)$$

Divergensfritt fält : $\operatorname{div} \bar{F} = 0$

Rotationsfritt fält : $\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}$

Förut : Rotationsfritt fält $\Leftarrow$ konservativt fält

Nästan samma sak :

rotationsfritt fält $\underset{\text{lokalt}}{\Longleftrightarrow}$ konservativt fält

Vad betyder detta : $\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0} \underset{\text{lokalt}}{\Longleftrightarrow}$ det finns ϕ så att $\bar{F} = \nabla \phi$

Varför lokalt?

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} = \bar{0}}$$

Topologiska effekter.

$\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}$

Kanske inte finns ϕ i hela D

Kan bli fel efter ett varv

Finns det motsvarighet för divergensen?

$$\boxed{\text{div rot} = 0}$$

$\bar{G} = (G_1, G_2, G_3)$ v.f.

$$\text{rot}\,\bar{G} = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

$$\text{div rot}\,\bar{G} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 G_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 G_1}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 G_3}{\partial y \partial x}}$$

$$+ \cancel{\frac{\partial^2 G_2}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 G_1}{\partial z \partial y}} = 0.$$

VEKTORPOTENTIAL

$\bar{G}$ är en vektorpotential till $\bar{F}$ om $\bar{F} = \text{rot}\,\bar{G}$.

Ett nödvändigt villkor för att $\bar{F}$ ska kunna ha en vektorpotential är att $\operatorname{div} \bar{F} = 0$.

Omvändningen är SANN LOKALT.

Om $\operatorname{div} \bar{F} = 0$ så finns lokalt ett $\bar{G}$ så att $\operatorname{rot} \bar{G} = \bar{F}$.

Tänk på att det finns många vektorpotentialer $\bar{G}$ till $\bar{F}$ om $\operatorname{div} \bar{F} = 0$.

Jämför : $\operatorname{grad} \phi = \bar{F}$, $\phi + C$ är friheten.

$$\underbrace{G_0}_{\operatorname{rot} \bar{G}_0 = \bar{F}} + H. \quad , \quad \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{0}$$

<u>Ex.</u> Hitta en vektorpotential till fältet $\bar{F} = (Ax, y, z)$ om sådan finns. Här är A en konstant.

Lösn. Vi måste ha $\operatorname{div}\bar{F}=0$.

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(Ax)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=$$

$$= A+1+1 = A+2 = 0$$

så $A=-2$.

Hitta vektorpotential $\bar{G}=(G_1,G_2,G_3)$:

$$\operatorname{rot}\bar{G} = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

$$= (-2x, y, z).$$

$$\begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial G_3}{\partial y}} - \dfrac{\partial G_2}{\partial z} = -2x \\[2ex] \dfrac{\partial G_1}{\partial z} - \cancel{\dfrac{\partial G_3}{\partial x}} = y \\[2ex] \dfrac{\partial G_2}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1}{\partial y} = z \end{cases}$$

förenklande antagande: en av G_1, G_2, G_3 kan antas vara $=0$

välj $G_3=0$

$$G_2 = 2xz + C_1(x,y)$$

$$G_1 = yz + C_2(x,y)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = z$$

testa $\begin{cases} G_1(x,y) = 0 \\ G_2(x,y) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} G_1 = yz \\ G_2 = 2xz \end{cases}$

$2z - z = z$ OK! $\bar{G} = (yz, 2xz, 0)$ funkar!

Sammanfattningsvis:

$\bar{F}$ v.f.

(1) $\bar{F}$ har potential, dvs är konservativt
nödv. villkor $\text{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$

(2) $\bar{F}$ har vektorpotential. Nödv. villkor
$\text{div}\,\bar{F} = 0$.

Efter pausen: Greens formel

Specialfall av Stokes sats

Alt. som 2dim variant av Gauss' sats.

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

OBS! Lyft till 3dim $\bar{F} = (P, Q, 0)$

$$\operatorname{rot} \bar{F} \cdot \bar{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\bar{k} = (0, 0, 1)$$

normalvektor till D : $\hat{n} = \bar{k}$
(planet)

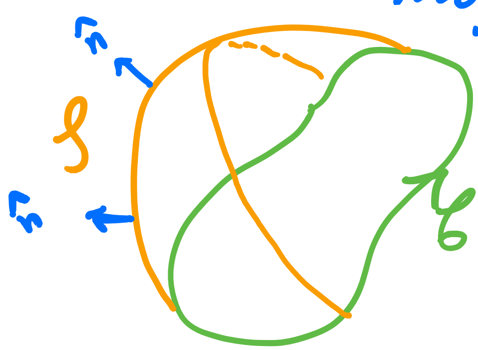
Stokes :
tillämpat
i detta fall

$$\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{\bar{F} \cdot d\bar{r}}_{P\,dx + Q\,dy} = \iint_{D} \underbrace{\operatorname{rot} \bar{F} \cdot \cancel{\hat{n}}_{\bar{k}}}_{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}} \, dA$$

Stokes i 3dim :

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \bar{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

tecken? $\hat{n}$ två stycken riktningar möjliga.



skruvregeln

Specialfall av Greens formel:

① $P = y$, $Q = 0$:

$$\oint_{\mathcal{C}} y \, dx = \iint_{D} \Big(\underbrace{-\frac{\partial P}{\partial y}}_{-1} \Big) dx dy =$$

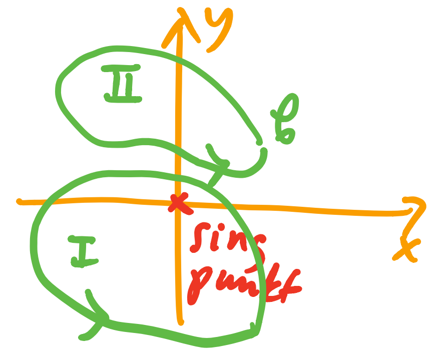
$$= -\iint_{D} dx dy = -\text{area}(D)$$

② $P = 0$, $Q = x$:

$$\oint_{\mathcal{C}} x \, dy = \iint_{D} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{=1} dx dy = \text{area}(D)$$

Betrakta nu

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$



<u>Fall II först</u>: $\mathcal{C}$ går inte runt origo.

Tillämpa Greens formel direkt!

$P = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = ?$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} =$$

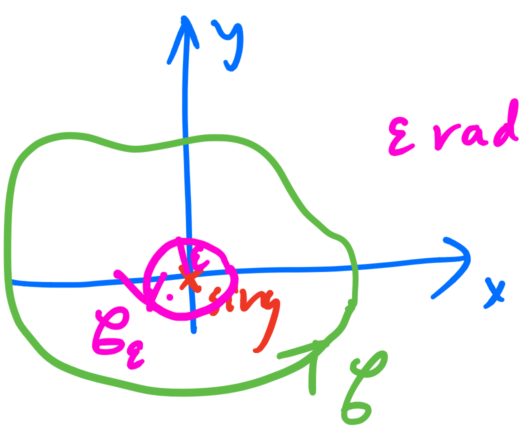
$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ här så $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Greens formel ger nu i Fall II att

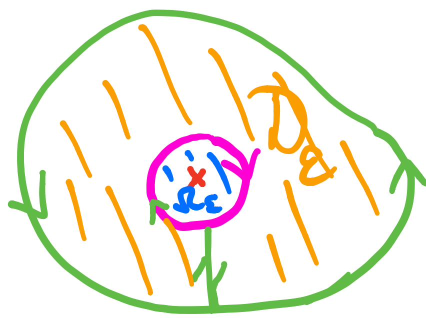
$$\oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy = 0.$$

Fall I. Kan inte tillämpa Greens formel direkt eftersom origo är en singulär punkt.



ε radien på cirkeln $\mathcal{C}_\varepsilon$

$\mathcal{C} - \mathcal{C}_\varepsilon$ runt $\mathcal{C}$, men baklänges på $\mathcal{C}_\varepsilon$.



Greens formel för $\mathcal{C} - \mathcal{C}_\varepsilon$:

$$\oint_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \underbrace{\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy}_{\text{återstår!}}$$

$$\begin{cases} P = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \overset{\text{på}}{\underset{\mathcal{C}_\varepsilon}{=}} -\dfrac{y}{\varepsilon^2} \\[2ex] Q = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$

$$\oint_{\mathcal{C}_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy = \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} -\frac{y}{\varepsilon^2}\,dx + \frac{x}{\varepsilon^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} -y\,dx + x\,dy =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\text{area}(\Omega_\varepsilon) + \text{area}(\Omega_\varepsilon) \right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\pi \varepsilon^2 + \pi \varepsilon^2 \right) = \frac{2\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 2\pi.$$

Slutsats: $\displaystyle \oint_{\mathcal{C}} -\frac{y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}$

beroende på om kurvan $\mathcal{C}$ går runt origo eller inte!

Tolkning i distributionsmening:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2\pi \underbrace{\delta_0(x)\delta_0(y)}_{\text{punktmassa i origo}}.$$

Tolkning av Greens formel som en enkel variant av Stokes formel hur vi vi redan pratat om.

Men hur var det med Gauss' sats? Kan vi tolka Greens formel i termer av Gauss' sats också?

Gauss' sats: $\boxed{\oiint_S \bar{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_B \operatorname{div}\bar{F}\,dV.}$

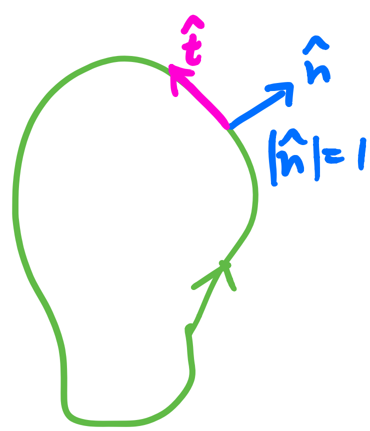
En 2-dimensionell variant av Gauss' sats?

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\bar{F}\,dA$$

$\bar{F} = (P, Q)$

$\operatorname{div}\bar{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$

$\hat{n}\,ds = ?$



$$\hat{n}\,ds = (dy, -dx)$$

Varför blir detta rätt?

tangentriktningen $(dx, dy) = \hat{t}\,ds$

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ båglängdselementet.

$$\hat{n} \cdot \hat{t} = 0 \;?$$

$$(dy, -dx) \cdot (dx, dy) = dy\,dx - dx\,dy = 0$$

$\therefore$ ortogonala!

$$\oint_{C} \bar{F} \cdot \hat{n}\,ds = \oint_{C} (P, Q) \cdot (dy, -dx) =$$

$$= \boxed{\oint_{C} P\,dy - Q\,dx \underset{\text{Gauss}}{=} \iint_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\,dy}$$

Samma som Greens formel!

$$\tilde{P} = -Q \,, \quad \hat{Q} = P$$

$$VL = \oint_{C} \tilde{P}\,dx + \tilde{Q}\,dy \overset{\text{Gauss}}{=} \iint_{D} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Detta är precis samma som Greensformel!