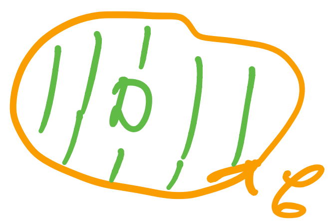
GREENS FORMEL:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

$\bar{F} = (P, Q)$

$\mathcal{C}$ sluten kurva runt området D



Specialfall av intresse:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} x\,dy = -\oint_{\mathcal{C}} y\,dx = \text{area}(D).}$$

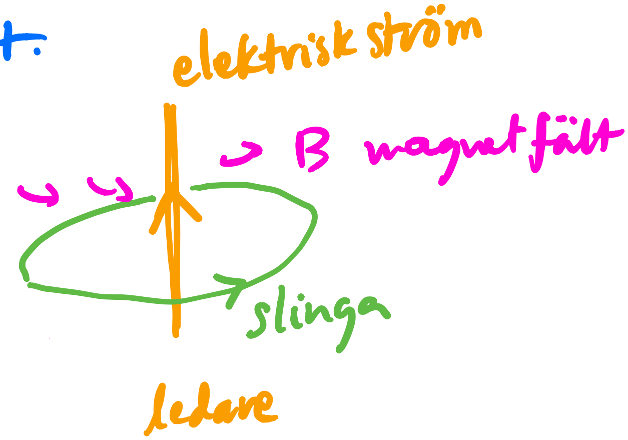
Detta användes för att visa att

$$\oint_{\mathcal{C}} \overbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}^{P} dx + \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{Q} dy =$$

$$= \begin{cases} 2\pi & \text{om origo} \in D \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

$$\bar{F} = (P, Q) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

är ett fält i planet som motsvarar ett magnetfält.



Divergenssatsen (Gauss' sats) i 2dim:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \bar{F}\, dx dy \qquad \operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}}$$

$\hat{n}$: utåtriktad normal, normaliserad

$\hat{n}\, ds \overset{\text{tolka}}{=} (dy, -dx)$, $\quad ds$ = båglängdselementet

$$\bar{F}\cdot\hat{n}\, ds = (P,Q)\cdot(dy,-dx) =$$

$$= P\,dy - Q\,dx$$

Vi känner igen Greens formel:

$$\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{-Q}_{\tilde{P}}\, dx + \underbrace{P}_{\tilde{Q}}\, dy = \iint_{D} \Big(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}}_{\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}}\Big)\, dx\,dy$$

Motsvarande divergenssats i 3dim:

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \bar{F}\cdot\hat{n}\, dS = \iiint_{B} \operatorname{div}\bar{F}\, dV}$$

$\hat{n}$ utåtriktad normal, normaliserad

B är kroppen innanför $\mathcal{S}$ som alltså är randyta till B.

$$\operatorname{div} \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

om $\bar{F} = (P, Q, R)$.

Alla dessa satser är av typen

integral av en $(n-1)$-dim typ =
integral av n-dim typ.

dim $n = 1$: integral i 0 dim = integral i 1 dim
?

Huvudsatsen

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{1-dim}} = \underbrace{\Big[F(x)\Big]_a^b}_{\text{0-dim}}, \quad F \text{ primitiv till } f.$$

1-dim

$[a,b]$

0-dim
randintegral
$\{a\}$ och $\{b\}$.

Greens formel, Gauss' sats, Stokes' sats, är alla av samma typ och är nära släkt med Huvudsatsen i analysen.

Ex. $\overline{F} = (\overbrace{bxy^2}^{P}, \overbrace{bx^2y}^{Q}, \overbrace{(x^2+y^2)z^2}^{R})$

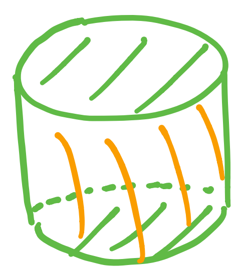
S : randyta till cylindern

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le a^2 \\ 0 \le z \le b \end{cases}.$$

Beräkna flödet $\oiint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS$!

$\hat{n}$ utåtriktad enhetsnormal till S.

Lösn. Tobbiga metoden: räkna ut integralerna över locken och mantelytan separat och sedan lägg ihop resultatet.



3 delar i S
lock, 2st
mantelyta

Enklare metod: användandet av vektoranalysens huvudsatser

Gauss' sats:

$$\oiint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \overline{F}\, dV$$

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(bxy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(bx^2y) + \frac{\partial}{\partial z}\left[(x^2+y^2)z^2\right]$$

$$= by^2 + bx^2 + (x^2+y^2)2z =$$

$$= (b+2z)x^2 + (b+2z)y^2 = (b+2z)(x^2+y^2).$$

Vad är B? cylindern $\begin{cases} x^2+y^2 \le a^2 \\ 0 \le z \le b. \end{cases}$

$$\iiint_B \operatorname{div}\bar{F}\,dV = \iiint_B (b+2z)\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\underbrace{dxdydz}_{dV}$$

$$= \left[\text{cylindriska koordinater } \begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{matrix}\right]$$

$$= \iiint_{\substack{0\le r\le a \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le z\le b}} (b+2z)\underbrace{r^2\, r}_{r^3}\, dr\, d\theta\, dz = \left[\text{produkt-formeln}\right]$$

$$= \int_0^b (b+2z)\,dz \cdot \int_0^a r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \left[bz+z^2\right]_0^b \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \left[\theta\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \underbrace{\left[b\cdot b+b^2-0\right]}_{2b^2} \underbrace{\left[\frac{a^4}{4}-0\right]}_{a^4/4} \underbrace{\left[2\pi-0\right]}_{2\pi} =$$

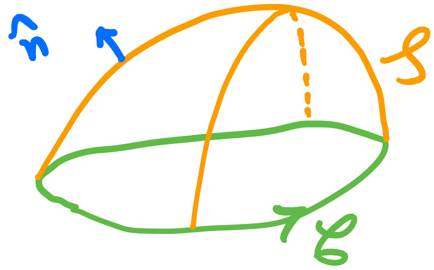
$$= 2b^2 \cdot \frac{a^4}{4} \cdot 2\pi = a^4 b^2 \pi$$ blir flödet.

Det finns fler identiteter av Gauss-typ, som man kan få ur Gauss' sats med lite räkning.

$$\boxed{\begin{aligned} &\oiint_S \underbrace{\bar{F}\times\hat{n}}_{vf}\, dS = -\iiint_B \underbrace{\operatorname{rot}\bar{F}}_{vf}\, dV \\ &\oiint_S \overbrace{\phi}^{vf}\,\hat{n}\, dS = \iiint_B \underbrace{\operatorname{grad}\phi}_{vf}\, dV \end{aligned}}$$

ϕ: skalärfält

Stokes' satz : $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{F})\cdot\hat{n}\, dS$
(3dim)



skruvregeln

$\mathcal{C}$ är randkurva till ytan $\mathcal{S}$.

Stokes' sats passar in i beskrivningen

$$\boxed{\text{integral i 1 dim} = \text{integral i 2 dim}}$$

Stokes' sats och konservativa fält:

Om $\bar{F}$ är konservativt $\Rightarrow \text{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$.

$\Leftarrow$ omvändning?

Förstå omvändningen i termer av Stokes' sats!

Anta att $\boxed{\text{rot}\,\bar{F} = \bar{0}.}$

$\Downarrow$?

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0 \quad \text{för alla slutna kurvor}$$

$\Leftrightarrow$ $\bar{F}$ är konservativt.

$$0 \overset{?}{=} \oint_{\mathcal{L}} \bar{F} \cdot d\bar{r} \overset{\text{Stokes'}}{=} \iint_{\mathcal{S}} \underbrace{(\text{rot}\,\bar{F})}_{=0} \cdot \hat{n}\, dS$$

$$= 0 \quad \text{klart!}$$

Finns det några kluriheter här?

Behöver ha $\text{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$ på yta $\mathcal{S}$ som har $\mathcal{L}$ som randkurva.

Nu kan det vara så att ni inte vet att $\text{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$ i hela rummet utan bara i ett delområde.

Det här är orsaken till att användningen måste man vara försiktig med.

Samma sak gäller i 2dim, där

rot $\bar{F} = \bar{0}$ tolkas som att $\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$.

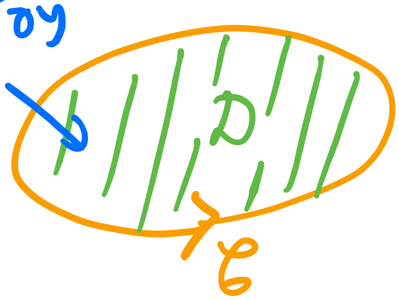
i hela D

$\bar{F} = (P, Q)$

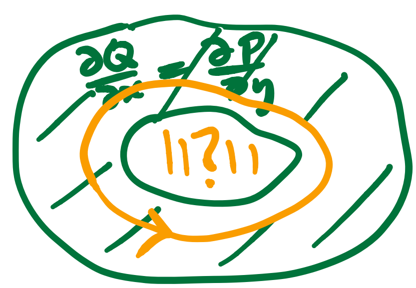
$$\oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \overbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}^{=0} dx\,dy$$

$$= 0.$$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$



Kan se ut så här:

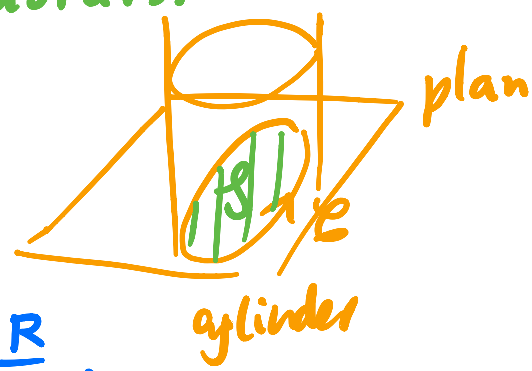


Träna på att räkna!

<u>Ex.</u> $\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$, $\bar{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$

$\mathcal{C}$ kurva som ges som snittet av planet $2x+2y+z=3$ och cylindern $x^2+y^2=1$.

Vilken riktning? projektionen av $\mathcal{C}$ på xy-planet ska gå moturs.



Lösn.

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\bar{F}=(P, Q, R)$$

$$P=-y^3,\quad Q=x^3,\quad R=-z^3$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0-0=0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0-0=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2-(-3y^2)=3(x^2+y^2).$$

Stokes' sats: $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}}\bar{F}\cdot d\bar{r}=\iint_{S}(\operatorname{rot}\bar{F})\cdot\hat{n}\,dS$

$$= \iint_S (0,0,3(x^2+y^2)) \cdot \hat{n}\, dS$$

Vilket S ? $\hat{n} = ?$

S : i planet $2x + 2y + 1z = 3$

dessutom $x^2 + y^2 \le 1$

$\hat{n}\, dS = ?$

planets normal : $\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\text{normaliserar}}(2,2,1) = \hat{n}$

stämmer med skruvregeln

$|(2,2,1)| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

$dS = 3\, dx\, dy$

Det finns en formel $dS = \dfrac{|\nabla G|}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|} dx\, dy$

ytan ges av $G = 0$

funkar om $G = 2x + 2y + z - 3$

$$\begin{cases} \nabla G = (2,2,1) \\ \frac{\partial G}{\partial z} = 1 \end{cases} \qquad dS = \frac{|(2,2,1)|}{1} dx\, dy$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} (0,0,3(x^2+y^2))\cdot\overbrace{\tfrac{1}{3}(2,2,1)}^{\hat{n}}\cdot\underbrace{3\,dxdy}_{dS}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\cancel{0\cdot\tfrac{2}{3}}+\cancel{0\cdot\tfrac{2}{3}}+\cancel{3}^{1}(x^2+y^2)\cdot\tfrac{1}{\cancel{3}_{1}}\right)3\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} 3\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\underbrace{dxdy}_{dA} = [\text{polära}]$$

$$= \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} 3r^2\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA} =$$

$$= \int_0^1 3r^3\,dr\int_0^{2\pi} d\theta = \left[3\frac{r^4}{4}\right]_0^1\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

<u>Ex</u> $I = \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{F})\cdot\hat{n}\,dS$

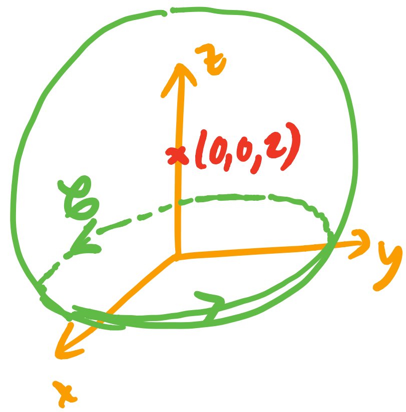
S : den del av sfären $x^2+y^2+(z-2)^2=8$

centrum $(0,0,2)$ radie $\sqrt{8}$

som ligger ovanför xy-planet.
$\hat{n}$ pekar utåt från sfärens centrum.

$$\bar{F} = (y^2 \cos(xz), x^3 e^{yz}, -e^{xyz}).$$

Lösn. $I \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$



vilken kurva?

Slutför hemma!

Alt. går igenom nästa gång.