Konservativa fält

Kurssammanfattning

Tentaträning

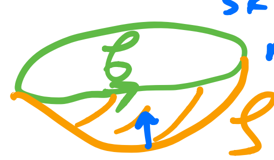
Vi diskuterade konservativa fält förra gången.

$$\text{Konservativt fält } \bar{F} \overset{\text{def}}{\iff} \bar{F} = \nabla \phi \quad \boxed{\Rightarrow \text{rot}\, \bar{F} = \bar{0}}$$

$$\iff \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0}$$ för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$

Omvändning: bygger på Stokes' sats:

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\text{rot}\, \bar{F}) \cdot \hat{n}\, dS$$



skruv-regeln

Här ser vi direkt att vi får att

$$\oint_{C} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_{S} \underbrace{(\mathrm{rot}\,\bar{F})}_{=\bar{0}} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

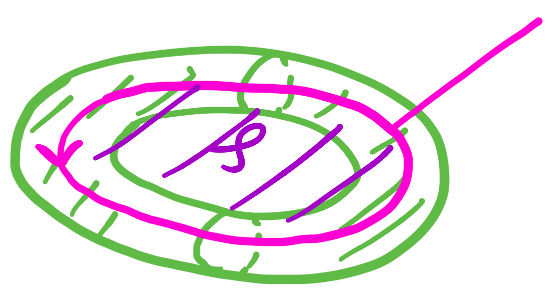
kräver att $\mathrm{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$ på hela ytan S.

Kan vara ett problem!

Det beror på hur området där det är givet att $\boxed{\mathrm{rot}\,\bar{F} = \bar{0}}$ ser ut!

Om vi inte kan trä igenom en sådan yta S inuti det givna området så får vi problem.

Badring = området



S hamnar utanför badringen! $\mathrm{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$ gäller inte utanför badringen.

Lokalt gäller förstås:

$$\boxed{\operatorname{rot}\bar{F} = \bar{0} \Rightarrow \text{det finns } \phi \text{ så att } F = \nabla\phi.}$$

Ex. $I = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{F})\cdot\hat{n}\,dS$, där

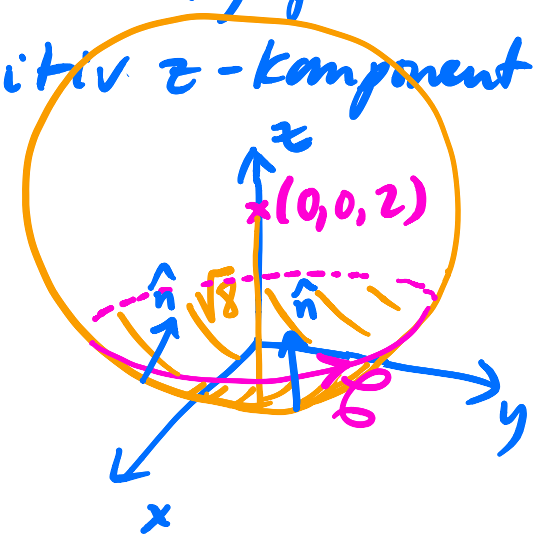
$$\bar{F} = \left(y^2\cos(xz),\ x^3e^{yz},\ -e^{xyz}\right)$$

S: den del av sfären $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ som ligger under xy-planet.

$\hat{n}$: positiv z-komponent.

C: $x^2+y^2+\underbrace{\cancel{(z-2)^2}}_{z=0}=8$, $\quad (-2)^2=4$

$x^2+y^2=8-4=4$



Lösn.

Vi kan använda Stokes sats baklänges:

$$\iint_{S} (\text{rot}\,\bar{F})\cdot\hat{n}\,dS = \oint_{\mathcal{C}} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$\mathcal{C}$ ← pos led i xy-planet

$$= \oint_{\substack{x^2+y^2=4 \\ z=0}} \left(y^2\underbrace{\cos(xz)}_{\cos 0=1},\ x^3\underbrace{e^{yz}}_{e^0=1},\ -\underbrace{e^{xyz}}_{-e^0}\right)\cdot\left(dx, dy, \underbrace{dz}_{0}\right)$$

$$= \oint_{\substack{x^2+y^2=4 \\ z=0}} \left(y^2, x^3, -1\right)\cdot\left(dx, dy, 0\right) =$$

$$= \oint_{\substack{x^2+y^2=4 \\ z=0}} y^2\,dx + x^3\,dy - \cancel{1\cdot 0}$$

$$= \oint_{x^2+y^2=4} y^2\,dx + x^3\,dy$$

[integral i planet bara!]

$$= \left[\begin{array}{l} \text{parametrisera:} \\ x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array} \quad 0 \le t \le 2\pi\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\sin t)^2 \underbrace{d(2\cos t)}_{-2\sin t\,dt} + (2\cos t)^3 \underbrace{d(2\sin t)}_{2\cos t\,dt}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8\sin^3 t\,dt) + 16\cos^4 t\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8\sin^3 t + 16\cos^4 t)\,dt =$$

$= [\sin^3 t$ udda$]$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\cancel{-8\sin^3 t} + 16\cos^4 t)\,dt =$$

$$= 16\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 t\,dt \overset{?}{=}$$ [använd dubbla vinkel formeln $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$]

$$= 16\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2}_{\frac{1}{4}(1^2+\cos^2 2t+2\cos 2t)} dt =$$

$$= 4\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \cancel{2\cos 2t} + \cos^2 2t\right) dt$$

$$= 4\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \cos^2 2t\right) dt = \left[\begin{array}{l}\text{dubbla vinkeln:} \\ \cos^2 2t = \frac{1+\cos 4t}{2}\end{array}\right]$$

$$= 4\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \cancel{\tfrac{1}{2}\cos 4t}\right) dt$$

$$= 4\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{3}{2}\, dt = 4\left[\tfrac{3}{2}t\right]_{-\pi}^{\pi} = 4\cdot\tfrac{3}{2}\cdot 2\pi = \boxed{12\pi.}$$

SVARET.

Kurssammanfattning:

Beskrivning av kurvor med parametrisering

Koordinatbyten: cylindriska och sfäriska koordinater.

Derivator: partiella
riktningsderivata
gradienten, ∇-kalkyl.

Koordinatbyten med kedjeregeln i
flera variabler.

Jakobimatris, Jakobian

Integraler i flera variabler

Variabelbyten med Jakobian

⇝ spec. de klassiska variabel-
bytena (cylindriska, sfäriska)

Optimeringsproblem

kritiska punkter

1 var	flera var.
$f'=0$	$\nabla f = \bar{0}$
	Hessianen
$f''>0$	$H_f >> 0.$

lok min.

med bivillkor:

Lagrange-multiplikatorer

Vektoranalys

grad, rot, div

$\nabla \quad \nabla\times, \nabla\cdot$

Greens formel (2dim)

Motsvarigheter i 3 dim:

Divergenssatsen (Gauss' sats)

Stokes' formel.

Konservativa fält

Arbetsintegraler

Ytintegraler, spec. flödes-integraler

Kurvlängd, ytberäkningar, m.m.

Efter pausen: TEN 2019-01-10

DEL A enkla bonus

DEL B svårare

DEL C ännu svårare.

DEL A

(1) $\bar{F} = (\overset{P}{y+z}, \overset{Q}{x+z}, \overset{R}{x+y})$. def överallt

(a) $\operatorname{div} \bar{F} = ?$

(b) $\operatorname{rot} \bar{F} = ?$

(c) $\bar{F}$: finns en potential ϕ?

(d) Beräkna $\oint_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r}$ längs en sluten kurva γ (vilken som helst).

Lösn. $\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(x+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y)$$

<u>divergensfritt</u>

$$= 0 + 0 + 0 = 0.$$

$\operatorname{rot} \bar{F} = ?$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$= (0, 0, 0).$$

$\bar{F}$ blir <u>rotationsfritt</u>.

(c) $\bar{F} = \operatorname{grad} \phi$?

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R}$$

$\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0} \Rightarrow$ det finns lokalt ett ϕ.

även globalt (topologiska svårigheter saknas)

$\phi = xy + xz + yz$ fungerar!

(d) $\oint_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ pga konservativt fält.

---

② A = triangeln med hörn i $(0,0), (0,1), (1,1)$.

Låt $B = T(A)$, där $T(x,y) = (-x,-y)$.

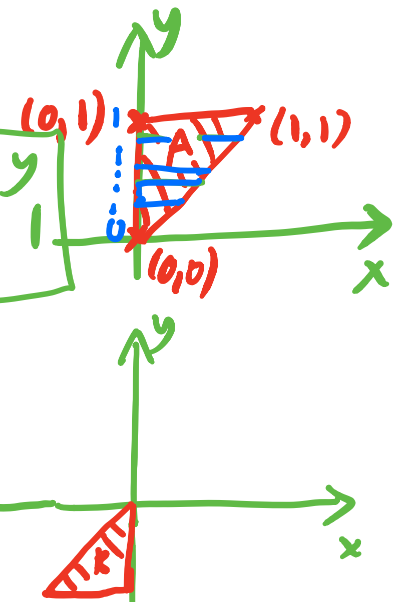
(a) Beräkna $\iint_A xy\,dxdy$

(b) Beräkna $\iint_B xy\,dxdy$.

Lösn.

(a) $\iint_A xy\,dxdy =$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{array}}$$



$$= \iint_{0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1} xy\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x=0}^{x=y} xy\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - 0 \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^3\,dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{8}.$$

(b) direktmetod, men även <u>variabel-bytesmetoden</u>!

$$\iint_B xy\,dx\,dy = \iint_{(x,y)\in T(A)} xy\,dx\,dy =$$

$$= \begin{bmatrix} (x,y) = T(u,v) \\ \text{dvs } x = -u,\ y = -v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx\,dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv \\ = \left| \det \begin{pmatrix} x'_u, & x'_v \\ y'_u, & y'_v \end{pmatrix} \right| du\,dv \end{bmatrix}$$

$$= \iint_{(u,v)\in A} \overbrace{(-u)(-v)}^{uv} \underbrace{\left| \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right|}_{=1} du\,dv$$

$$= \iint\limits_{(u,v)\in A} uv\,du\,dv = \iint\limits_{A} uv\,du\,dv = \frac{1}{8}.$$

DEL B.

③ $\mathcal{C}$ skärning av $\underbrace{x^2+y^2=1}_{\text{cylinder}}$ med $\underbrace{z = x+\sqrt{3}y}_{\text{plan}}$.

(a) Ge en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$. $\boxed{\bar{r}=\bar{r}(t)}$

(b) Bestäm $\bar{r}'(t)$ i kurvans högsta punkt (m a p z-riktningen).

Lösn. $\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z = x+\sqrt{3}y. \end{cases}$

parametrisera: cylindriska koordinater

(a) $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = x+\sqrt{3}y = \cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

$$\bar{r} = \bar{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ (ett varv).

(b) max z (dvs högst)
kräver kritisk punkt

max $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

klurigt!

Trigonometriska formler:

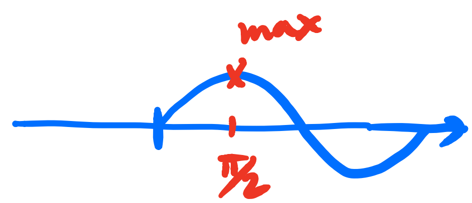
max!

$$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \boxed{2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

(summaformeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$)

När är $\sin x$ störst? vinkel $x = \frac{\pi}{2}$

Vad är då θ?



$$\theta_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

vilken punkt? $\bar{r}(\theta_0) = \bar{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}, 2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right).$

$$\bar{r}'(\theta_0) = \bar{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta, \sin\theta, 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-\sin\theta, \cos\theta, 2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cdot 1\right)\Bigg|_{\theta=\pi/3}$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Detta ger tangentriktningen i den givna punkten!

---

④ $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$ $\quad h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{\ln(x^2+y^2)}$

$g(x,y) = \sqrt{\dfrac{|x|}{|y|}}$

(a) Avgör om def området för f resp g är: öppet, slutet, eller ingetdera.

(b) Bestäm minsta värdet för funktionen $h(x,y)$ i sitt def område.

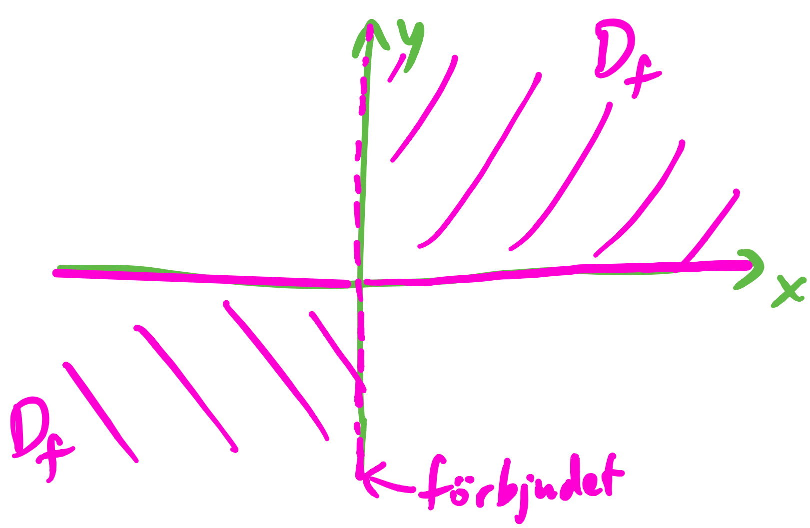
(c) Bestäm Taylor-polynomet av grad 1

för funktionen g i punkten $(1,1)$,

(d) "grad 2" istället.

Lösn. $f(x,y)=\sqrt{y/x}$ def då

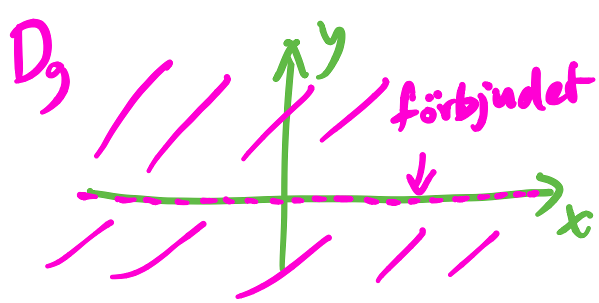
$$\frac{y}{x}\geq 0, \quad x\neq 0.$$



D_f varken öppet eller slutet.

D_g : $g=\sqrt{\frac{|x|}{|y|}}$, vad krävs ?

$$\underbrace{\frac{|x|}{|y|}\geq 0}_{\text{OK alltid}}, \quad y\neq 0.$$



öppet

(b) Minsta värdet för $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{\ln(x^2+y^2)}$ finns det ?

polära koordinater: $x^2+y^2=r^2$

$$h = \frac{r^2-1}{\ln r^2} = [t=r^2] = \frac{t-1}{\ln t} = \frac{1}{\frac{\ln t}{t-1}}$$

studera max för $\dfrac{\ln t}{t-1} \geq 0$

Max saknas eftersom gränsvärdet då $t \to 0^+$ blir $+\infty$.

Så min av $\dfrac{x^2+y^2-1}{\ln(x^2+y^2)}$ saknas !

(c) Taylorpolynom av g ? I $(1,1)$.

$$g(1,1) = \sqrt{\frac{|1|}{|1|}} = \sqrt{1} = 1.$$

$g'_x(1,1) = ?$ $\qquad g(x,y) = \sqrt{\dfrac{|x|}{|y|}} \underset{\substack{\text{kring} \\ (1,1)}}{=} \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

$$g(x,y) = x^{1/2}\, y^{-1/2}$$

$$g'_x = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{-1/2}, \quad g'_y = -\frac{1}{2} x^{-1/2} y^{-3/2}$$

Stoppa in $(1,1)$: $g_x'(1,1) = \frac{1}{2}$

$g_y'(1,1) = -\frac{1}{2}$

Taylorpolynom av grad 1:

$$g(1,1) + g_x'(1,1)h + g_y'(1,1)k =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}k = \left[\text{byt } \begin{matrix} h = x-1 \\ k = y-1 \end{matrix}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1).$$

(d) Taylor av grad 2:

$$g(1,1) + g_x'(1,1)h + g_y'(1,1)k$$

$$+ g_{xx}''(1,1)\frac{h^2}{2} + g_{yy}''(1,1)\frac{k^2}{2} + g_{xy}''(1,1)hk$$

$$= \left[\text{derivera, stoppa in punkten}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}k - \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}hk + \frac{3}{8}k^2$$

kan byta $\boxed{h = x-1, \ k = y-1.}$.