FLERA VARIABLER

Flerdimensionella rum $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}$ ett exemplar av tallinjen

Element i $\mathbb{R}^n$: punkter $(x_1, \ldots, x_n)$

där alla $x_1, \ldots, x_n$ är reella tal (på $\mathbb{R}$).

Vad gjorde vi i en variabel?

$y = f(x)$, x reell, y reell

Derivatan $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$

Integralen $\int_a^b f(x)dx$ (inkl Riemann-summor)

Optimeringsproblem $\max_{x \in [a,b]} f(x)$

Serier och följder

Taylors formel $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

Gränsvärden (behövs t.ex. för derivatans def.)

Parametrisering (för att beskriva t.ex. en kurva)

Struktur hos $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\begin{array}{l} \bar{x} = \bar{y} \text{ betyder:} \\ x_1 = y_1 \ldots\ x_n = y_n \end{array}}$

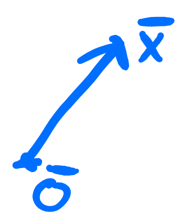
$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \\ \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right\} \quad \bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

komponentvis addition

Om $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

Ger en linjär struktur till $\mathbb{R}^n$.

Vektorrum : Bilda till $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ vektorn från origo till $\bar{x}$.



Additionen blir vektoraddition. Skalärmultiplikation dessutom.

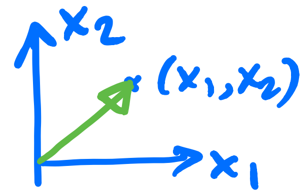
Skalärprodukt : $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

produkten blir en skalär.

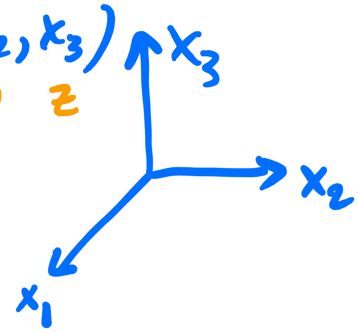
Skalärprodukten kan tolkas geometriskt.

Ex. $n=1$: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ linjen

$n=2$: $\mathbb{R}^2$ planet. (x_1, x_2)
$x \quad y$



$n=3$: $\mathbb{R}^3$ (x_1, x_2, x_3)
$x \quad y \quad z$



chiral tolkning
högersystem

Kommentar: det finns molekyler där den spegelvända molekylen får annorlunda egenskaper.

Betydelsefullt vid t.ex. produktion av läkemedel. En av isomererna är biologiskt aktiv, den andra inaktiv. Klassiskt ex: vinsyra och citronsyra.

Tolkning av skalärprodukten

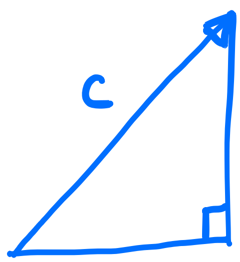
$$\bar{x}\cdot\bar{x} = x_1\cdot x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n\cdot x_n =$$
$$= x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Vi skriver förenklat

$$|\bar{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

$|\bar{x}|$ = längden på vektorn $\bar{x}$

Pythagoras sats:



$\bar{x} = (x_1, x_2)$ $\quad x_1 = a,\ x_2 = b.$

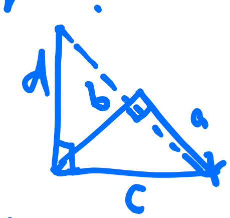
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Detta funkar i $\mathbb{R}^2$

Hur i $\mathbb{R}^3$ då? $\quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3).$

Pythagoras' sats 2ggr:

$$|\bar{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$



Allmänna fallet analogt.

$$\boxed{\bar{x}\cdot\bar{y} = |\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cdot\cos\theta}$$

$\bar{x}\cdot\bar{y} = 0$ $\quad \bar{x}\perp\bar{y}$

betyder:

$\cos\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$ rad.

Här är θ vinkeln mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$.

$$\boxed{|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq |\bar{x}|\cdot|\bar{y}|}$$

Följer ur egenskapen att $|\cos\theta| \leq 1$.

Lite plan geometri

Linear algebra: Plan, delrum
linje genom origo.

$\mathbb{R}^n$: $\quad A_1x_1 + \dots + A_nx_n = B$

$\bar{A} = (A_1, \dots, A_n)$

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\boxed{\bar{A}\cdot\bar{x} = B.}$$

Hitta punkt $\bar{x}^0$ med $\bar{A}\cdot\bar{x}^0 = B$.

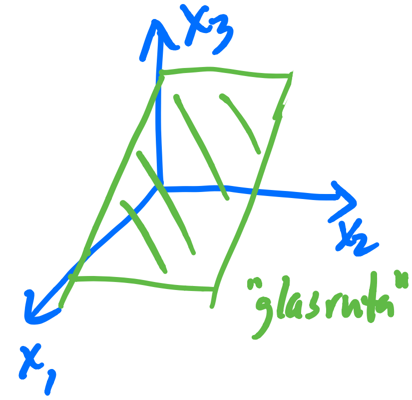
$$\bar{A}\cdot(\bar{x}-\bar{x}^0) = \underbrace{\bar{A}\cdot\bar{x}}_{B} - \underbrace{\bar{A}\cdot\bar{x}_0}_{B} = B - B = 0.$$

$$\boxed{\bar{A} \perp \bar{x} - \bar{x}_0}$$

Hyperplan genom punkten $\bar{x}^0$

dim $= n-1$

I $\mathbb{R}^3$ får vi ett plan!



Andra geometriska objekt:

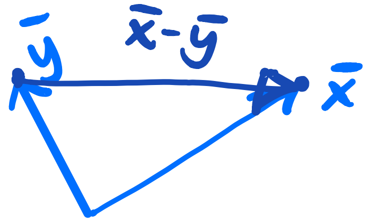
Sfär

Har $\begin{cases} \text{centrum (punkt)} \\ \text{radie (tal } > 0) \end{cases}$

Sfär kring origo $\bar{O}$: $|\bar{x}| = a$

$a > 0$ radie.

OBS! Avståndet mellan två punkter $\bar{x}$ och $\bar{y}$: $|\bar{x} - \bar{y}|$.



$|\bar{x}-\bar{y}|$ = avstånd mellan vektorernas ändpunkter.

$$|\bar{x}-\bar{0}| = |\bar{x}| = a$$

Vi byter till en annan punkt $\bar{c}$:

$\boxed{|\bar{x}-\bar{c}| = a.}$ beskriver en sfär med radie a och centrum i $\bar{c}$.

Vi brukar kvadrera bägge sidor:

$|\bar{x}-\bar{c}|^2 = a^2$ dvs

$$(x_1-c_1)^2 + \dots + (x_n-c_n)^2 = a^2.$$

Bollen då? (Massiv kula)

$|\bar{x}-\bar{c}|^2 < a^2$ alt. $|\bar{x}-\bar{c}|^2 \leq a^2$

öppen sluten

Cylindrar

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_n)$

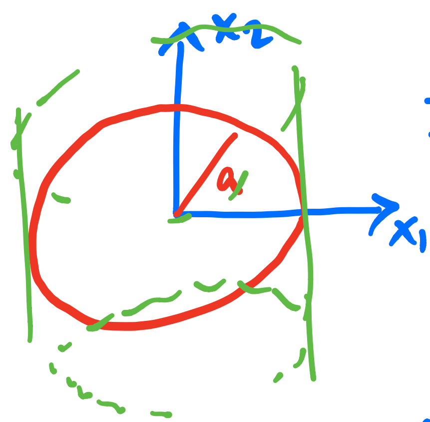
$1 < d < n$

Villkoret $(x_1-c_1)^2+\dots+(x_d-c_d)^2=a^2$ beskriver cylinder (sfärisk).

$n=3,\ d=2.$

$$\boxed{(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2=a^2}$$

cirkel i $\mathbb{R}^2$: centrum i (c_1,c_2) radie a.



I 3 dim?
x_3-axel.
Cirkel flyttar sig i x_3-riktn.
Vi får en cylinder

Olikhet då? $(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2<a^2$
Vad blir det i $\mathbb{R}^3$?

Massiv cylinder
(tänk pepparkaksdeg)

$(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2>a^2$ istället?

Urholkat $\mathbb{R}^3$ med en massiv cylinder.

Lite om mängder :

Omgivning till en punkt $\bar{c}$: $|\bar{x}-\bar{c}|<a$ för något $a>0$.

Mängd : har element.

Man behöver ha en procedur för att avgöra om ett tänkbart element faktiskt ligger i mängden.

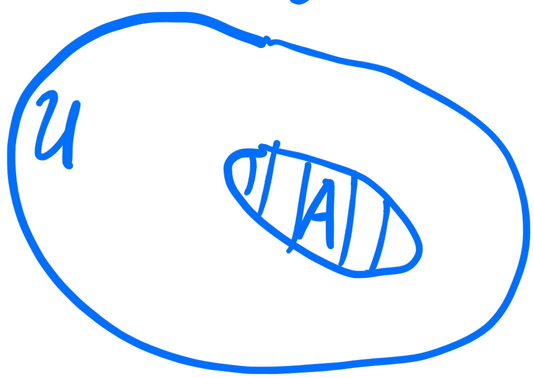
I vår kurs : mängder som är delmängder i $\mathbb{R}^n$

Elementen är punkter (alt. vektorer)

Mängden ges av ett kriterium typ ett gäng likheter eller olikheter.

Mer allmänt : Vår mängd ligger inuti

en större mängd (universalmängd).



$A^c = U \setminus A$

alla punkter i U som inte ligger i A. Kallas för <u>komplementet</u>.

$U = \mathbb{R}^n$

En punkt i A är antingen:

(1) inre

(2) yttre

(3) randpunkt.

$\bar{c} \in A$ är <u>inre</u> om den har en någon omgivning som ligger inuti A.

$\bar{c} \in A^c$ är <u>yttre</u> om den har en omgivning som ligger inuti A^c.

Randpunkter är de som inte är inre och heller inte yttre.

Def: A är öppen om alla element i den är inre punkter.

Def: A är sluten om A^c är öppen.

Ex. $U=\mathbb{R}^2$, $\quad S = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 9\}$.

Bestäm de inre punkterna, yttre punkterna, samt randen till S.

Två koordinatbyten i $\mathbb{R}^3$:

Cylindriska koordinater : $(x,y,z) \longleftrightarrow (r,\theta,z)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}\right\}$ polära koordinater

$r \geq 0$, θ vinkel

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Sfäriska koordinater:

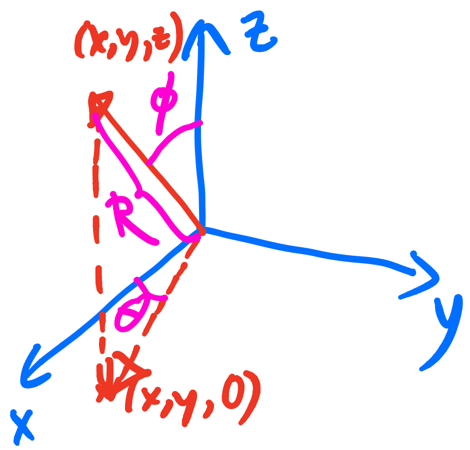
$$(x,y,z) \longleftrightarrow [R, \phi, \theta]$$

$$R \geq 0$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ längden^2 av vektorn.



$$\begin{cases} x = R \sin\phi \cos\theta \\ y = R \sin\phi \sin\theta \\ z = R \cos\phi \end{cases}$$

"polära koordinater 2 ggr"